POLIGONI E NON POLIGONI:

elementi caratteristici, proprietà e relazioni.

Il problema dell'altezza.

Clara Colombo Bozzolo, Carla Alberti, Patrizia Dova

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica

Direttore Scientifico prof. Mario Marchi

Coordinatrice responsabile prof.ssa Clara Colombo Bozzolo

Università Cattolica del Sacro Cuore

sede Brescia

Poligoni e non poligoni sono enti derivati

ß

devono essere definiti

Definire un ente significa

esprimere le condizioni necessarie e sufficienti per individuare l'ente

con l'utilizzo di termini, indicanti altri enti o relazioni, di cui è già noto il significato o perché definito o perché primitivo

Perché definire è un problema?

- si devono usare termini di cui è già noto il significato
- si devono esprimere le condizioni *necessarie* e *sufficienti* per individuare l'ente definito

definizione

- ha il carattere della *minimalità*, ossia dell'ente definito dice

solo "cose" *vere*

ma

non tutte le "cose" *vere*

descrizione

- *non* ha il carattere della *minimalità*, ossia dell'ente definito dice

tutte, o *tante*, "cose" *vere*

ü si devono esplicitare *connettivi* e *quantificatori* che fanno parte integrante della definizione

si possono formulare *definizioni equivalenti*, ossia definizioni che individuano tutti e soli gli stessi enti

ü la definizione è la sola base sicura per dedurre le proprietà dell'ente e con essa si deve essere *coerenti*

Importanti conseguenze ed applicazioni, anche didattiche

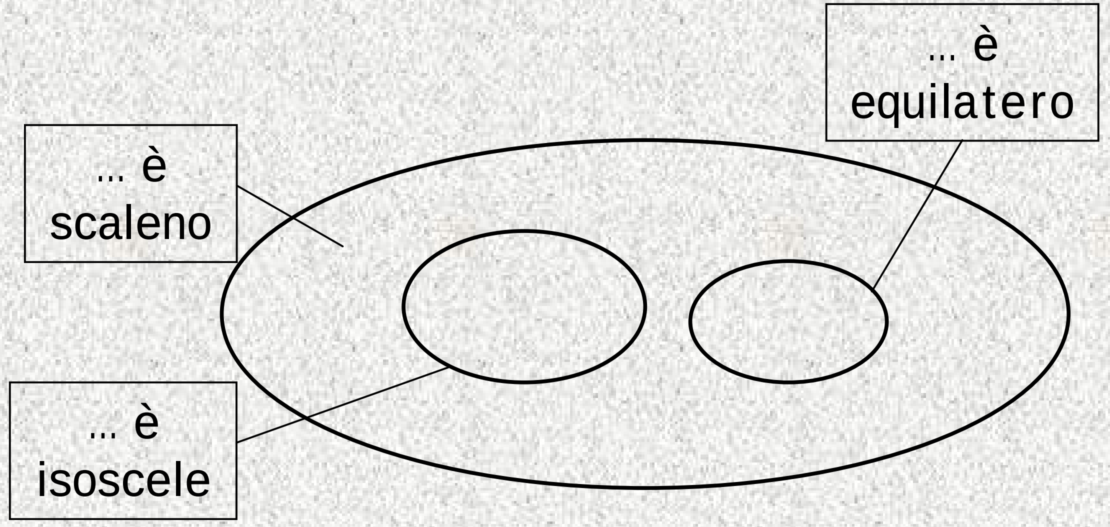
Il caso dei triangoli isosceli

Un triangolo è isoscele quando ha due lati congruenti

I triangoli equilateri sono triangoli isosceli?

Se con “due lati congruenti” si intende ...

... **solo due** lati congruenti, allora ogni triangolo equilatero non è un triangolo isoscele (accezione *esclusiva*)

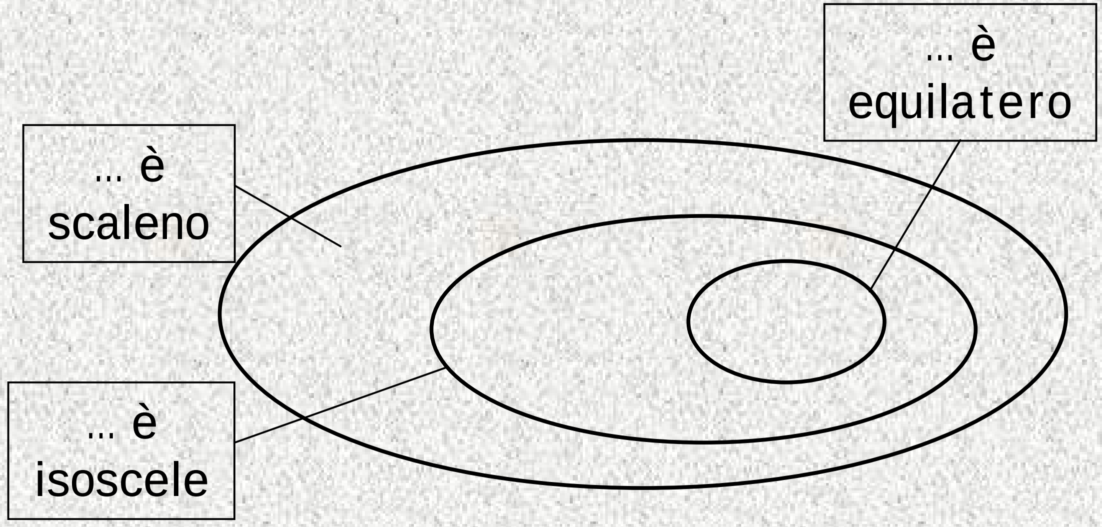


ü le proprietà dei triangoli isosceli non è detto siano proprietà anche dei triangoli equilateri

ü un triangolo non scaleno non è necessariamente un triangolo isoscele

ü un triangolo non isoscele non è necessariamente un triangolo scaleno

... **almeno due** lati congruenti, allora ogni triangolo **equilatero è** un triangolo **isoscele** (accezione *inclusiva*)



- tutte le proprietà dei triangoli isosceli sono proprietà anche dei triangoli equilateri
- un triangolo non scaleno è un triangolo isoscele
- un triangolo non isoscele è un triangolo scaleno

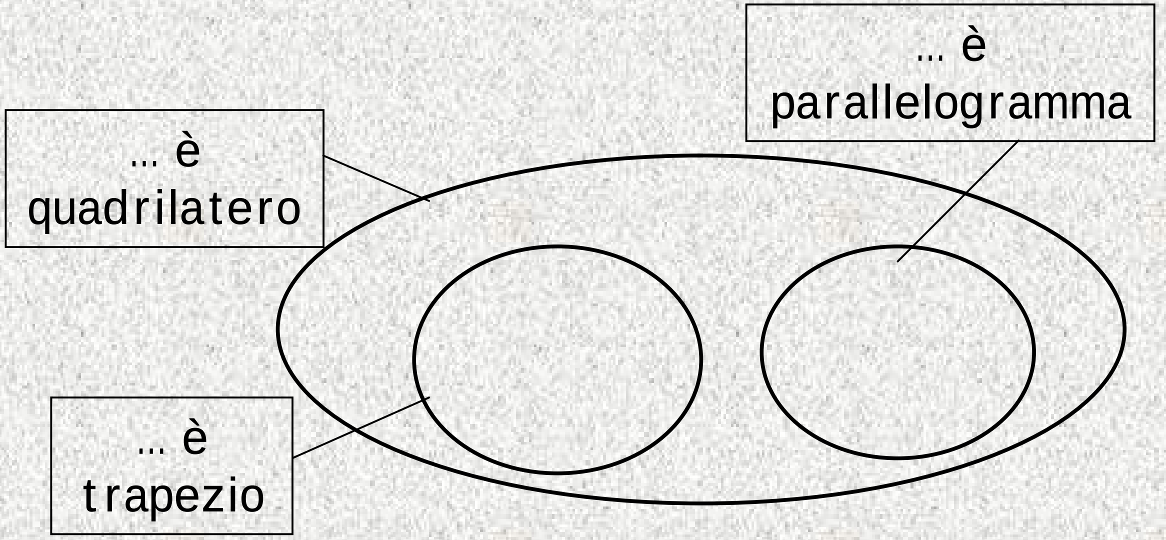
Il caso dei trapezi

Un trapezio è un quadrilatero con due lati tra loro paralleli

I parallelogrammi sono trapezi?

Se con “due lati paralleli” si intende ...

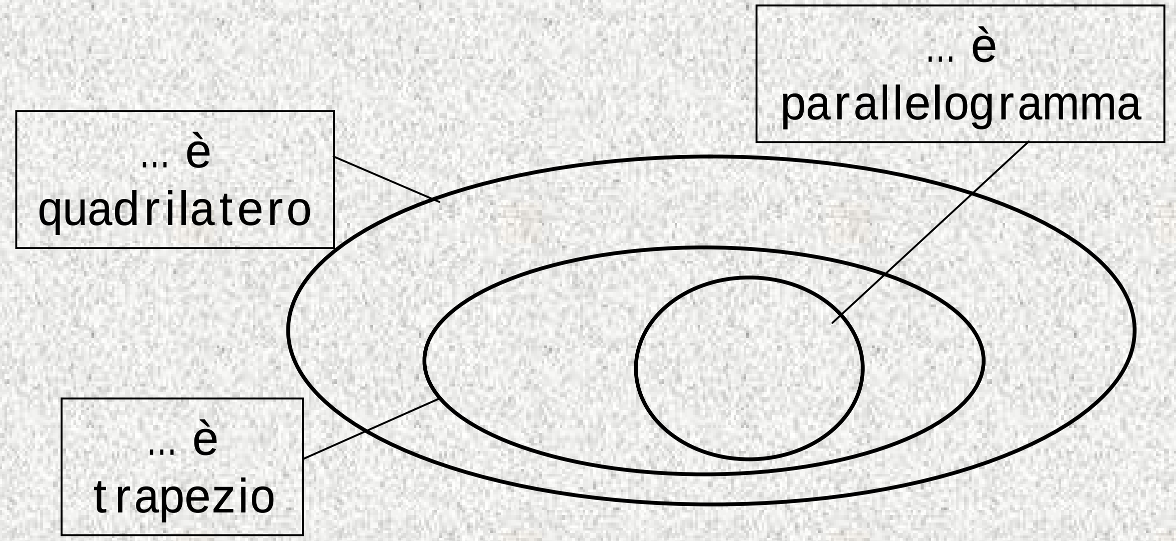
... **solo due** lati paralleli, allora ogni parallelogramma non è un trapezio (accezione *esclusiva*)



ü le proprietà dei trapezi non è detto siano proprietà dei parallelogrammi

ü tutti i trapezi non sono parallelogrammi

... **almeno due** lati paralleli, allora ogni **parallelogramma è** un **trapezio** (accezione *inclusiva*)



- ü tutte le proprietà dei trapezi sono anche proprietà dei parallelogrammi
- ü esistono trapezi che sono parallelogrammi

È importante chiarire quale definizione si adotta?

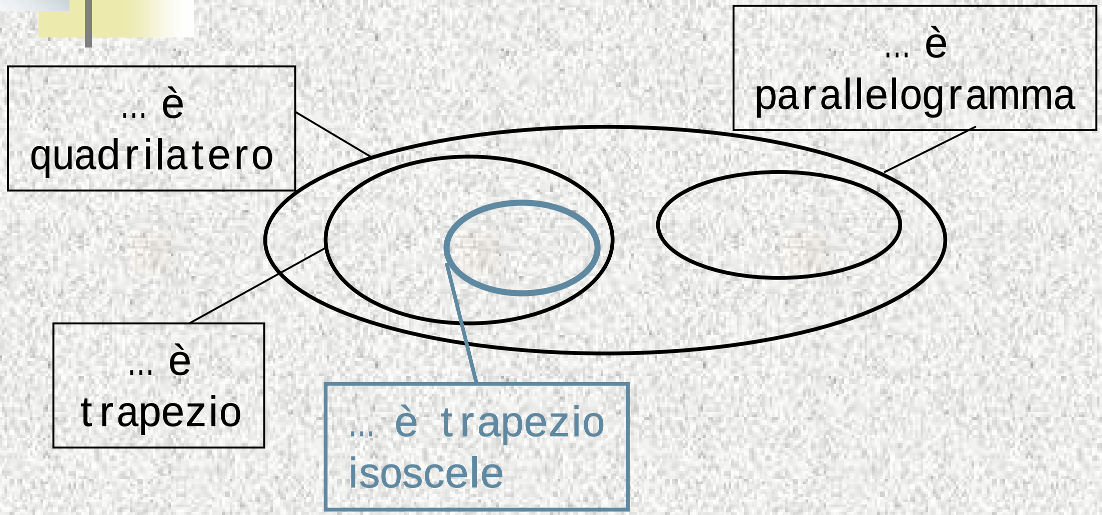
È solo una questione di classificazione dei quadrilateri?

Si consideri il caso speciale dei trapezi isosceli

Definizione "usuale":

un trapezio è detto isoscele quando ha i due lati obliqui congruenti.

Se il trapezio ha solo due lati tra loro paralleli



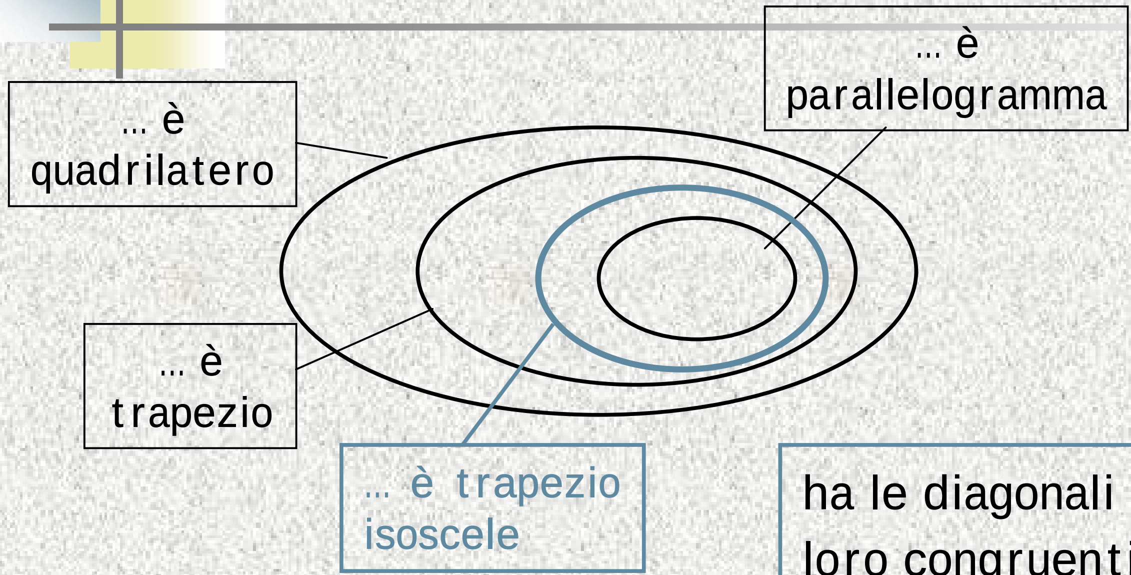
ha gli angoli adiacenti ad una base tra loro congruenti

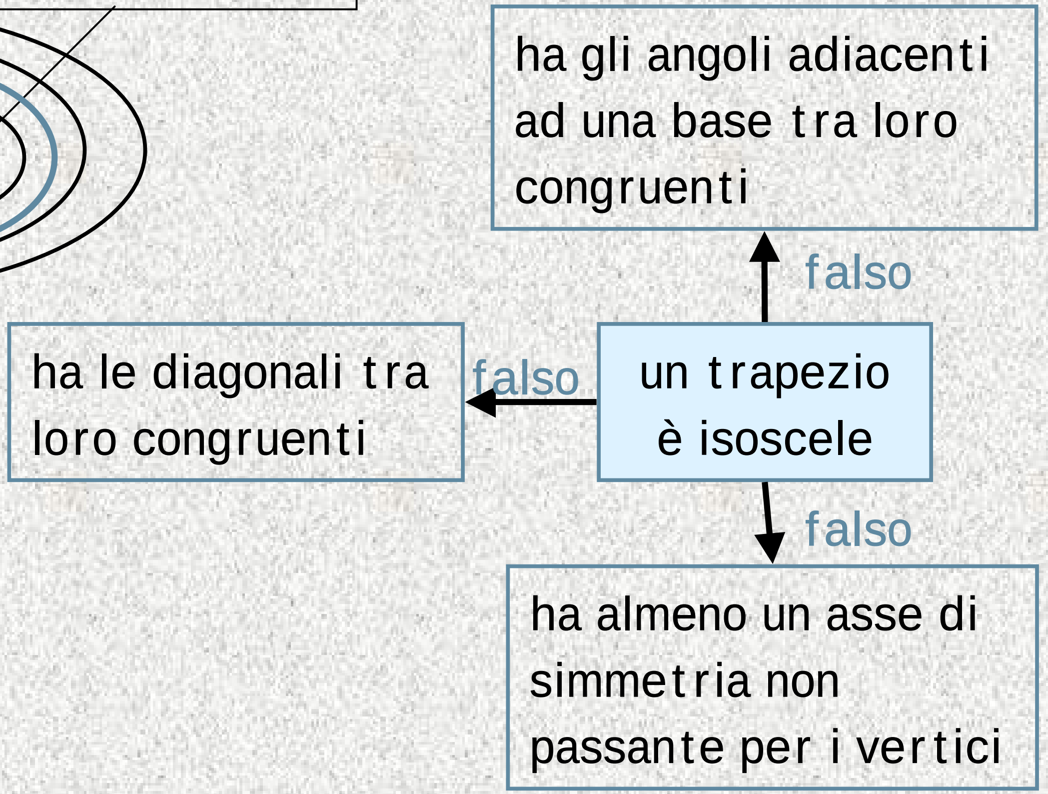
un trapezio è isoscele

ha le diagonali tra loro congruenti

ha almeno un asse di simmetria non passante per i vertici

Se il trapezio ha almeno due lati tra loro paralleli





Ogni parallelogramma è un trapezio isoscele

Se il trapezio ha almeno due lati tra loro paralleli …

… e si vuole che l'appellativo di trapezi isosceli non spetti a tutti i parallelogrammi è necessario modificare la definizione di trapezio isoscele

un trapezio è detto isoscele quando …

… ha gli angoli adiacenti ad una base tra loro congruenti

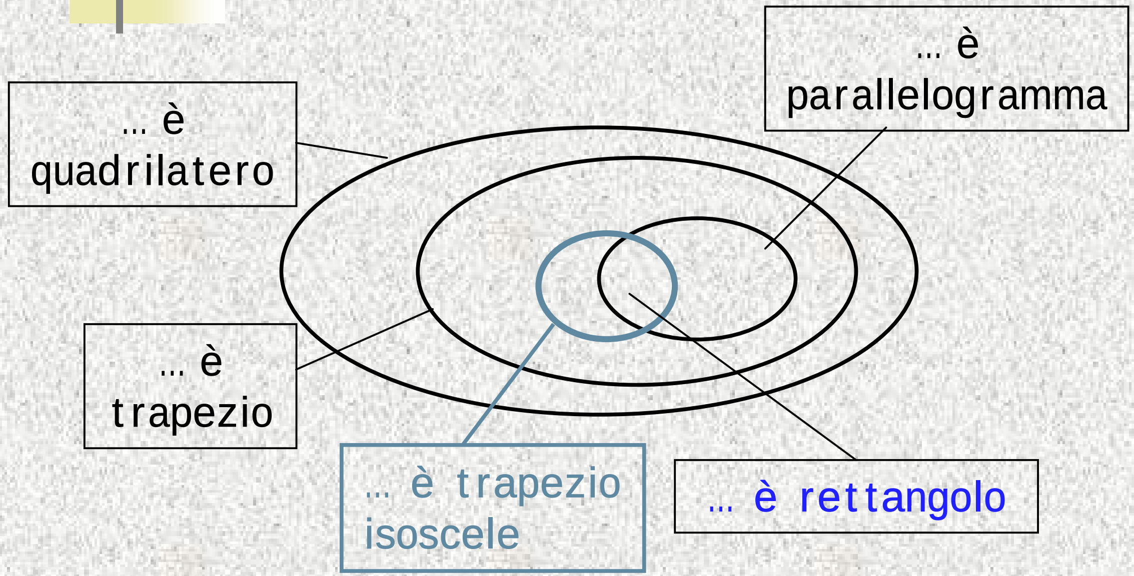
… ha le diagonali tra loro congruenti

… ha almeno un asse di simmetria non passante per i vertici

Definizioni equivalenti

Se il trapezio ha almeno due lati tra loro paralleli …

con una qualunque delle definizioni equivalenti precedenti, si ha

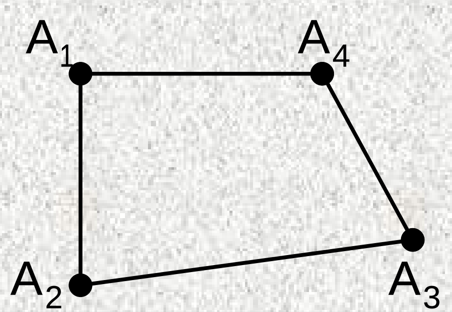
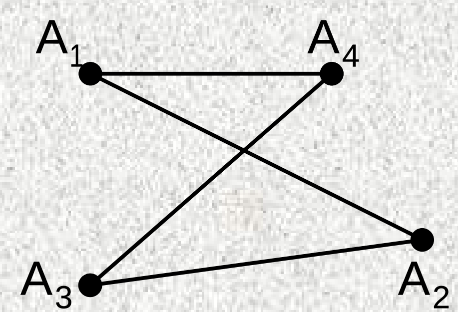
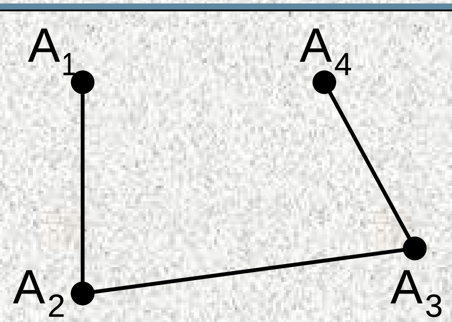
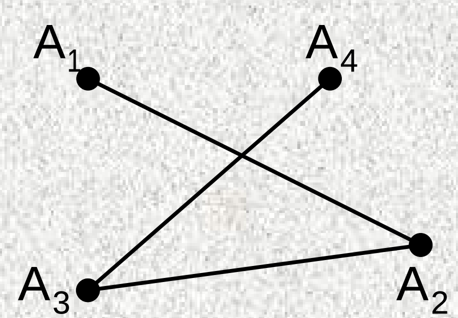


- I parallelogrammi rettangoli (quadrati e non quadrati) sono trapezi isosceli
- I parallelogrammi non rettangoli (rombi non quadrati e romboidi) non sono trapezi isosceli

I poligoni

Nozioni preliminari:

Dati in un piano *n* punti, considerati in un certo ordine A_1, A_2, ..., A_n, tali che tre punti consecutivi non siano allineati, si chiama spezzata la figura costituita dai punti A_1, A_2, ..., A_n (detti *vertici* della spezzata) e dai segmenti (detti *lati* della spezzata) che congiungono ogni punto al successivo poligonale

Spezzata	*semplice* ogni coppia di lati della spezzata ha in comune al più un estremo	*non semplice* (*intrecciata*) esistono due lati della spezzata che hanno in comune un punto che non è un estremo
chiusa tutti i vertici sono estremi di esattamente due lati della spezzata		
non chiusa (*aperta*) almeno un vertice è estremo di un solo lato della spezzata		

Una poligonale ripartisce il piano in due regioni disgiunte:

- una illimitata perché contiene rette (regione *esterna*)
- una limitata perchè non contiene rette (regione *interna*)

Un poligono (ordinario) è la figura piana costituita

da una poligonale e

dalla regione interna ad essa

ad ogni poligono competono

una linea $\xrightarrow[\text{associato}]{\text{alla quale è}}$ perimetro

una regione piana $\xrightarrow[\text{associata}]{\text{alla quale è}}$ area

Elementi significativi di un poligono ordinario e loro relazioni

Segmenti particolari

- **lati**: i lati della poligonale sono i lati del poligono
  - il numero dei lati determina il nome del poligono
  - il numero minimo di lati è 3
  - se $n \geq 3$ esiste un poligono che ha n lati

  - *criterio di costruibilità*: date $n \geq 3$ lunghezze, esse sono le lunghezze degli n lati di un poligono se e solo se la lunghezza maggiore è minore della somma di tutte le altre lunghezze.

ü corda: ogni segmento i cui estremi appartengono a lati distinti del poligono

Ø diagonale: è una corda avente gli estremi in due vertici non consecutivi del poligono;

un poligono di $n \geq 3$ lati ha $[(n - 3) \times n] : 2$ diagonali

Esempi

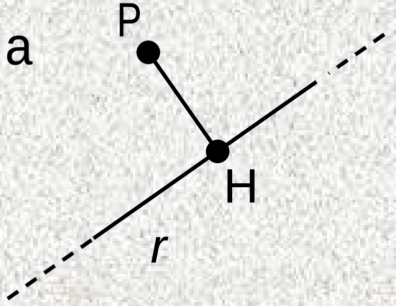
Ogni triangolo ha 0 diagonali, poiché $[(3 - 3) \times 3] : 2 = 0$

Ogni quadrilatero ha 2 diagonali, poiché $[(4 - 3) \times 4] : 2 = 4 : 2 = 2$

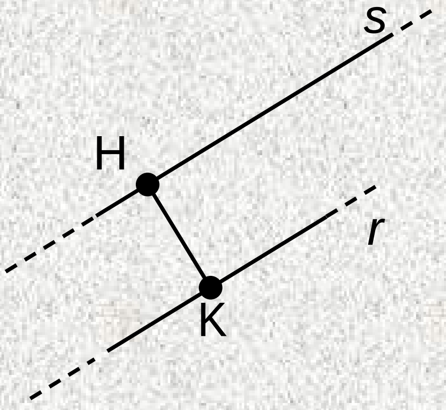
Ogni pentangono ha 5 diagonali, poiché $[(5 - 3) \times 5] : 2 = 10 : 2 = 5$

ü altezza: come è definita?

Data una retta *r* e un punto P, esiste ed è unica la retta passante per P e perpendicolare a *r*.



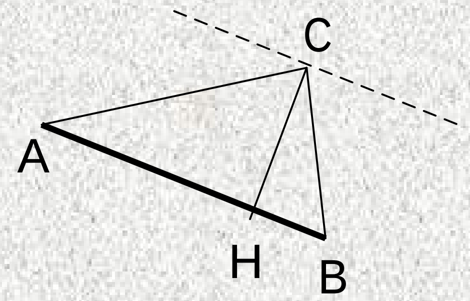
Si chiama altezza del punto P rispetto alla retta il segmento che ha come estremi il punto dato e il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta



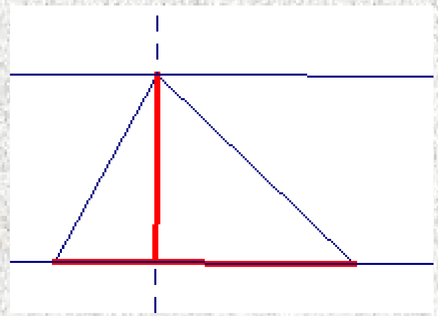
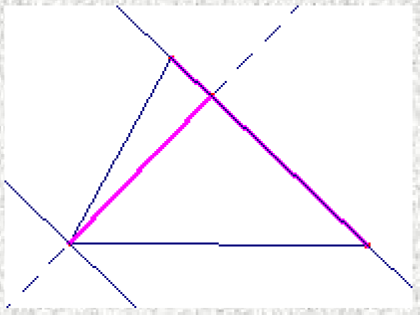
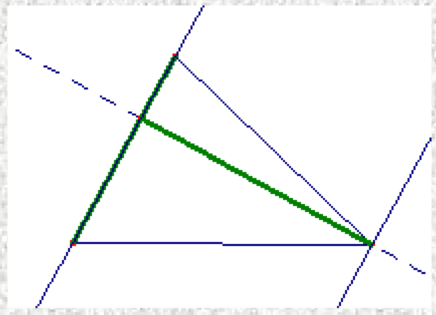
L'altezza di una striscia di piano è l'altezza di un punto qualsiasi di una retta rispetto all'altra (si dimostra che sono tutti congruenti).

Quali poligoni hanno altezza?

Triangoli: fissato un lato, vi è solo un vertice ad esso opposto, quindi è individuata una ed una sola retta parallela al lato, dunque una ed una sola altezza, che è visualizzata dall'altezza rispetto al lato base dal vertice opposto ad esso.



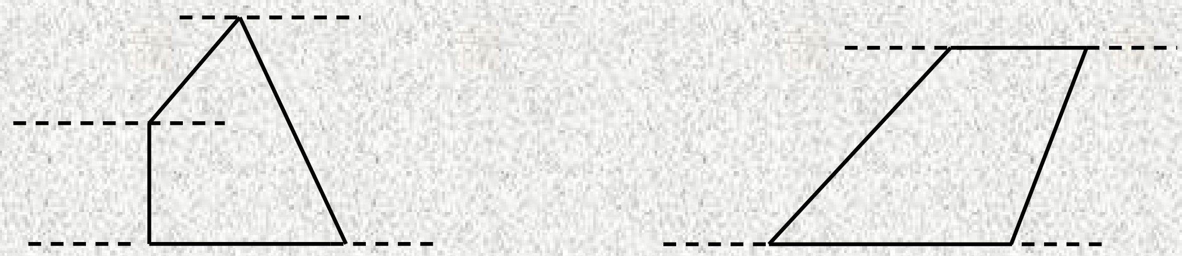
ogni lato del triangolo può essere assunto come base e a tale lato è associata una ed una sola altezza

Quadrilateri: fissato un lato (base), rimangono ad esso opposti due vertici, per cui viene individuata una ed una sola retta parallela alla retta della base se e solo se il lato relativo a questi due vertici è parallelo alla base.

Condizione necessaria per parlare di altezza in un quadrilatero è che esso abbia almeno una coppia di lati paralleli, cioè sia almeno un trapezio;

l'altezza risulta definita solo rispetto a ciascuno dei due lati paralleli.

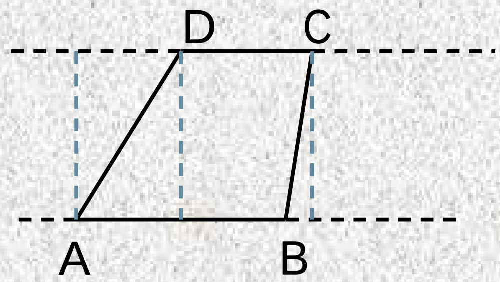


ü Se i trapezi hanno almeno una coppia di lati paralleli

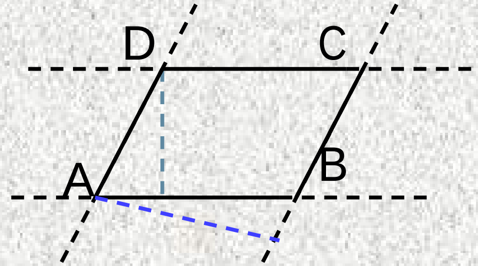
↓

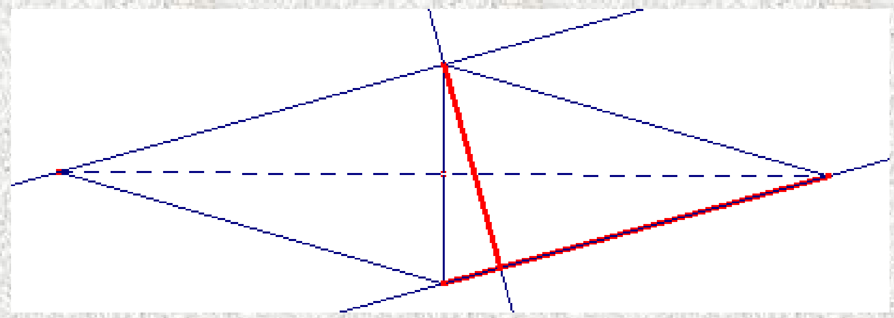
i trapezi hanno almeno un'altezza relativa a tale coppia di lati

Ø i trapezi con una sola coppia di lati paralleli hanno una sola altezza



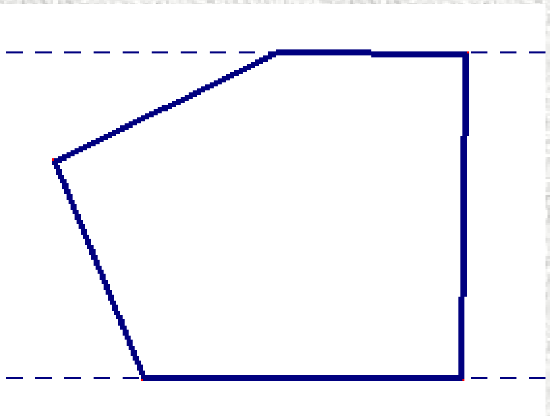
Ø i trapezi con due coppie di lati paralleli (parallelogrammi) hanno due altezze

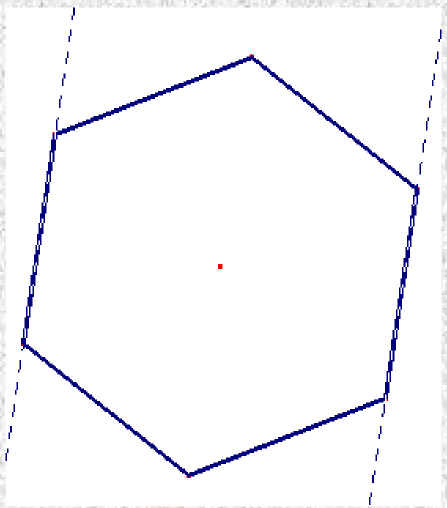




ü I quadrilateri non trapezi non hanno alcuna altezza

- I poligoni con più di 4 lati non hanno alcuna altezza: fissata la retta individuata da due vertici del poligono, ci sono almeno altri tre vertici del poligono che non appartengono a tale retta e non sono fra loro allineati





Angoli particolari di un poligono convesso

- **angolo interno**: ha come lati le semirette cui appartengono due lati consecutivi del poligono e nella relativa regione è completamente contenuto il poligono.

La somma dell'ampiezza degli angoli interni di un poligono di n lati è uguale a $(n - 2) \times 180°$

- **angolo esterno**: è l'angolo che, fissato un verso di percorrenza della poligonale, indica il cambiamento di direzione tra le rette di due lati consecutivi del poligono.

La somma dell'ampiezza degli angoli esterni di un poligono di n lati è uguale a $360°$