

## ***Identità ed equazioni***

$$3=3$$

*Nessuno potrebbe avere dubbi sulla validità di questa uguaglianza numerica. Essa può essere definita una identità.*

$$3=2$$

*Molti potrebbero avere dubbi sull'uguaglianza precedente, tanto è vero che in matematica essa viene definita un assurdo. La sua espressione corretta dovrebbe essere la seguente:*

$$3 \neq 2$$

*consideriamo la seguente uguaglianza letterale:*

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

*verifichiamo che se si sostituisce ad  $a$  un valore qualsiasi come per esempio  $+5$  l'uguaglianza è soddisfatta.*

$$(5 + 1)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1$$

$$6^2 = 25 + 10 + 1$$

$$36 = 36$$

*Verifichiamo ora che l'uguaglianza sia soddisfatta anche attribuendo ad  $a$  un altro valore qualsiasi come  $+2$*

$$(2 + 1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1$$

$$3^2 = 4 + 4 + 1$$

$$9 = 9$$

*ripetendo la prova con numeri qualsiasi il risultato è sempre un'identità numerica.*

*Quindi  $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$  è un'identità, perché l'uguaglianza sussiste qualunque valore numerico si attribuisca alla lettera  $a$ .*

*Si chiama identità una uguaglianza tra due espressioni letterali, che è sempre vera quali che siano i valori numerici attribuiti alle lettere che in essi figurano.*

*Ci sono invece uguaglianze letterali che sono vere soltanto per particolari valori attribuiti alle lettere. Consideriamo la seguente uguaglianza:*

$$3x + 3 = 4x + 1$$

*verifichiamo l'uguaglianza attribuendo ad  $x$  il valore  $2$ .*

$$3(2) + 3 = 4(2) + 1$$

$$6 + 3 = 8 + 1$$

$$9 = 9$$

*In questo caso l'uguaglianza è soddisfatta. Ma se attribuiamo ad  $x$  il valore 5?*

$$3(5)+3 \neq 4(5)+1$$
$$18 \neq 21$$

*per  $x=3$  si ha*

$$3(3)+3 \neq 4(3)+1$$
$$12 \neq 13$$

*In questi due ultimi casi l'uguaglianza non sussiste.*

*Quindi  $3x+3=4x+1$  è un'uguaglianza che risulta verificata soltanto se diamo ad  $x$  il valore 2.*

*Un'equazione è un'uguaglianza fra due espressioni letterali che è verificata soltanto per particolari valori attribuiti ad una lettera detta incognita.*

*La lettera alla quale bisogna attribuire determinati valori, perché l'equazione sia verificata si chiama incognita.*

### **Primo principio di equivalenza**

*Aggiungendo o sottraendo ai due membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione anche contenente l'incognita, si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

*Siano  $A(x)$  e  $B(x)$  i due membri di un'equazione.*

$$A(x) = B(x)$$

*Sia  $M$  un'espressione intera contenente o no l'incognita  $x$ ; aggiungendo o sottraendo tale termine ai due membri dell'equazione, il significato dell'equazione non cambia.*

$$A(x) + M = B(x) + M$$

*se  $M$  fosse uguale a  $-B(x)$*

$$A(x) - B(x) = B(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) - B(x) = 0$$

*In un'equazione si possono trasportare dei termini da un membro all'altro purché si cambino di segno: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.*

*ad esempio*

$$3x - 2 = 2x + 3$$

*aggiungendo ad ambo i membri  $+2$*

$$3x - 2 + 2 = 2x + 3 + 2$$
$$3x = 2x + 5$$

*allo stesso modo sottraendo ad ambo i membri  $2x$*

$$3x - 2x = 2x - 2x + 5$$

$$x = 5$$

*In un'equazione possiamo trasportare tutti i termini che contengono l'incognita in un membro e tutti i termini noti nell'altro, purché ai termini trasportati si cambi il segno.  
Due termini uguali e dello stesso segno, uno in un membro e uno nell'altro si possono sopprimere.*

### **Secondo principio di equivalenza**

*Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per uno stesso numero o per la stessa espressione non contenente l'incognita e il cui valore sia diverso da 0, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

*Sia ancora  $A(x)=B(x)$  l'equazione considerata in precedenza e sia  $M$  un'espressione algebrica diversa da 0 e non contenente l'incognita dell'equazione data.*

*Moltiplicando per  $M$  ambo i membri, avremo..*

$$A(x) \cdot M = B(x) \cdot M$$

*ricordando il primo principio di equivalenza:*

$$A(x) \cdot M - B(x) \cdot M = 0$$

*raccogliendo la  $M$  a fattor comune:*

$$M \cdot [A(x) - B(x)] = 0$$

*Ora poiché  $M$  non è nullo l'equazione è verificata solo per  $A(x)-B(x)=0$  cioè con  $A(x)=B(x)$  che è poi l'equazione iniziale,*

### **Conseguenze**

*Si può cambiare il segno a tutti i termini dell'equazione, perché ciò equivale a moltiplicare per(-1) ambo i membri.*

*Applichiamo il 2° principio alla seguente equazione:*

$$-3x = -15$$

$$(-1) \cdot (-3x) = (-1) \cdot (-15)$$

$$3x = 15$$

*Allo stesso risultato si perviene applicando il 1° principio prima aggiungendo  $3x$  e poi  $15$  ad ambo i membri.*

$$-3x + 3x = -15 + 3x$$

$$0 = 3x - 15$$

$$15 = 3x - 15 + 15$$

$$15 = 3x$$

Un'equazione contenente i termini a coefficienti frazionari si può ridurre ad una equivalente con coefficienti interi, moltiplicando i due membri dell'equazione per il m.c.m. dei denominatori.

$$\frac{x+1}{3} + \frac{3x+6}{4} = \frac{x}{2} + 3$$

$$m.c.m.(3;4;2)=12$$

$$12 \cdot \left( \frac{x+1}{3} + \frac{3x+6}{4} \right) = 12 \cdot \left( \frac{x}{2} + 3 \right)$$

$$12 \cdot \frac{x+1}{3} + 12 \cdot \frac{3x+6}{4} = 12 \cdot \frac{x}{2} + 12 \cdot 3$$

$$4(x+1) + 3(3x+6) = 6x + 36$$

$$4x + 4 + 9x + 18 = 6x + 36$$

$$4x + 9x - 6x = 36 - 4 - 18$$

$$7x = 14$$

$$x = \frac{14}{7} \rightarrow x = 2$$

### **Verifica dell'equazione**

Per accertarsi che le operazioni eseguite sono esatte, si sostituisce nell'equazione data, al posto dell'incognita, il valore trovato; se l'equazione è stata eseguita bene, i valori dei due membri devono risultare uguali.

ad esempio sostituiamo la  $x$  con 2 nell'equazione precedente:

$$\frac{2+1}{3} + \frac{3 \cdot 2 + 6}{4} = \frac{2}{2} + 3$$

$$\frac{3}{3} + \frac{6+6}{4} = 1 + 3$$

$$1 + \frac{12}{4} = 4$$

$$1 + 3 = 4$$

### **Risoluzione di un'equazione frazionaria**

Il procedimento per risolvere un'equazione frazionaria è uguale a quello usato per un'equazione a coefficienti interi frazionari.

Bisogna moltiplicare il m.c.m. dei denominatori per entrambi i membri dell'equazione.

Ad esempio:

$$\frac{x+1}{3x} - \frac{1}{2} = \frac{x-2}{3x}$$

$$l'm.c.m.(3x;2;3x)=2 \cdot 3x=6x$$

$$6x \cdot \left( \frac{x+1}{3x} - \frac{1}{2} \right) = 6x \cdot \frac{x-2}{3x}$$

$$6x \cdot \frac{x+1}{3x} - 6x \cdot \frac{1}{2} = 2(x-2)$$

$$2(x+1) - 3x = 2x - 4$$

$$2x + 2 - 3x = 2x - 4$$

$$2 + 4 = 3x - 2x + 2x$$

$$6 = 3x \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

*Esercizio 1:*

$$7x - 13 = 5(x + 2) + 1$$

$$7x - 13 = 5x + 10 + 1$$

$$7x - 5x = 13 + 10 + 1$$

$$2x = 24 \quad \rightarrow \quad x = \frac{24}{2} \quad \rightarrow \quad x = 12$$

*Esercizio 2:*

$$\frac{x-2}{2} = 2x - 10 - \frac{12-x}{2}$$

$$\frac{x-2}{2} + \frac{12-x}{2} = 2x - 10$$

$$\frac{x-2+12-x}{2} = 2x - 10$$

$$\frac{10}{2} = 2x - 10$$

$$5 = 2x - 10$$

$$2x = 15 \quad x = \frac{15}{2}$$

*Esercizio 3:*

$$\frac{5(x-2)}{4} - \frac{x+2}{8} = \frac{2(x-3)}{3} + 2$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot (x-2) - 3(x+2)}{24} = \frac{8 \cdot 2 \cdot (x-3) + 24 \cdot 2}{24}$$

$$\frac{30(x-2) - 3x - 6}{24} = \frac{16(x-3) + 48}{24}$$

$$\frac{30(x-2) - 3x - 6}{24} = \frac{16(x-3) + 48}{24}$$

$$30x - 60 - 3x - 6 = 16x - 48 + 48$$

$$30x - 3x - 66 = 16x$$

$$27x - 66 = 16x$$

$$11x = 66$$

$$x = \frac{66}{11} = 6$$

*Esercizio 4:*

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - 3x = -\frac{x+2}{7} - x - 6$$

$$\frac{x+2}{7} = 3x + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x - x - 6$$

$$\frac{x+2}{7} = \frac{9x+1-2x-3x-18}{3}$$

$$\frac{x+2}{7} = \frac{4x-17}{3}$$

$$7 \cdot \frac{x+2}{7} = \frac{4x-17}{3} \cdot 7$$

$$3(x+2) = \frac{7(4x-17)}{3} \cdot 3$$

$$3(x+2) = 7(4x-17)$$

$$3x+6 = 28x-119$$

$$119+6 = 28x-3x$$

$$125 = 25x$$

$$x = \frac{125}{25} = 5$$

*Esercizio 5:*

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{4}{x+1}$$

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x+1}$$

$$x+2 = 4(x-1)$$

$$x+2 = 4x-4$$

$$4+2 = 4x-x$$

$$6 = 3x \rightarrow \frac{6}{3} = x = 2$$

*Esercizio 6:*

$$\frac{6x+14}{5x-1} = 2$$

$$(5x-1) \cdot \frac{6x+14}{5x-1} = 2(5x-1)$$

$$6x+14 = 10x-2 \rightarrow 14+2 = 10x-6x$$

$$4x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{4} = 4$$