1.4 PRODOTTI NOTEVOLI

Il prodotto fra due polinomi si calcola moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine dell'altro e sommando poi i monomi simili. Talvolta i polinomi da moltiplicare presentano delle caratteristiche per le quali dopo aver eseguito la moltiplicazione ed aver ridotto i termini simili, si ottiene un'espressione algebrica in cui lo schema di calcolo rimane invariato. Tali prodotti vengono chiamati **prodotti notevoli**. In questi casi è utile, dopo avere individuato uno specifico prodotto notevole e averne dimostrato la validità, scrivere direttamente il risultato evitando i passaggi intermedi.
Con l'espressione **prodotti notevoli si indicano alcune identità che si ottengono in seguito alla moltiplicazione di polinomi le quali hanno caratteristiche particolari facili da ricordare**.

1.4.1 Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio A+B in cui A e B rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede **moltiplicando il binomio per se stesso**, eseguendo cioè la moltiplicazione $(A+B)(A+B)$ che sotto forma di potenza si scrive $(A+B)^2$.

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

(1) $$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Espressa nel linguaggio comune: ***il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.***
Analizzando il prodotto ottenuto si può notare che è costituito da tre termini ed in particolare due termini sono costituiti dal prodotto di ciascun monomio per se stesso, un termine è costituito dal prodotto dei due monomi moltiplicato a sua volta per 2.
Nella identità precedente, A e B rappresentano due monomi qualsiasi, quindi la scrittura $A+B$ deve intendersi come somma algebrica di due monomi che, rispetto al segno, possono essere concordi o discordi.
Ne consegue che:

- ✓ A^2 e B^2 sono sempre positivi perché prodotto di fattori uguali e quindi concordi.
- ✓ 2AB è positivo se A e B sono concordi, negativo se sono discordi.

Esercizi:

E1	$(3x + y)^2$	$= [(3x) + (y)]^2$	$= (3x)(3x) + 2(3x)(y) + (y)(y)$	$= 9x^2 + 6xy + \ldots$
E2	$(-3x + y)^2$	$= [(-3x) + (y)]^2$	$= (-3x)(-3x) + 2(-3x)(y) + (y)(y)$	$= \ldots\ \ldots\ \ldots$
E3	$(-3x - y)^2$	$= [(-3x) + (-y)]^2$	$= (-3x)(-3x) + \ldots\ldots\ldots$	$= 9x^2 + 6xy + y^2$
E4	$(3x - y)^2$	$= [(3x) + (- y)]^2$	$= \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$	$= \ldots\ \ldots\ \ldots$

E5 $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot(3y) + (3y)^2 = \ \ldots\ \ldots\ \ldots$

E6 $\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)^2 = \left(x^2\right)^{\cdots} + 2\cdot(\ldots\ldots)\cdot\left(-\ldots\ldots\right) + \left(-\frac{1}{2}y\right)^{\cdots} = \ = \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$

È possibile dare anche un'interpretazione geometrica della formula $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sostituendo A e B rispettivamente con le misure a e b di due segmenti. Prendiamo due segmenti di lunghezza *a* e *b*, portiamo a coincidere il secondo estremo del segmento lungo *a* con il primo estremo del segmento di lunghezza *b*: in questo modo otteniamo un segmento di lunghezza $a+b$. Costruiamo il quadrato di lato $(a+b)$, il quale avrà area $(a+b)^2$, e dividiamolo come in figura 1:

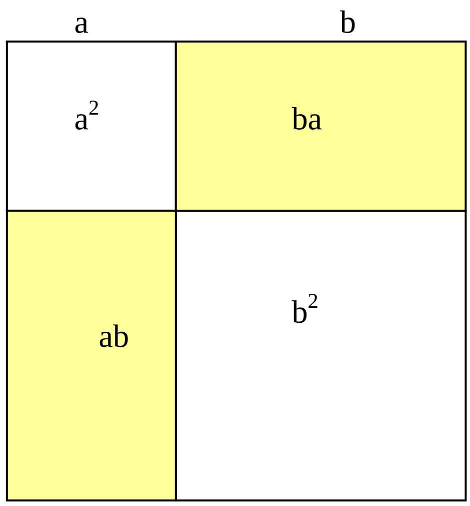

Figura 1. Scomposizione dell'area di un quadrato di lato a+b.

Si può notare che il quadrato di lato $a+b$ è composto da due quadrati di area rispettivamente a^2 e b^2 e da due rettangoli di area *ab*. Di conseguenza l'area del quadrato è uguale a:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

E7 Disegna un quadrato il cui lato è composto da due segmenti lunghi rispettivamente 3cm e 5cm. Esegui la scomposizione del quadrato in modo analogo a come fatto per la figura 1 e verifica la seguente uguaglianza: $(3+5)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 5 + 5^2$.

Sviluppa i seguenti quadrati di binomio

E8	$(x+1)^2$	$(x+2)^2$	$(x-3)^2$	$(2x-1)^2$
E9	$(x+y)^2$	$(x-y)^2$	$(2x+y)^2$	$(x+2y)^2$
E10	$(-a+b)^2$	$(-a-1)^2$	$(-a+3)^2$	$(-a+2b)^2$
E11	$(2a+3b)^2$	$(2a-3b)^2$	$(3a+2b)^2$	$(-2+3b)^2$
E12	$\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)^2$	$\left(-2x^2-\frac{7}{4}y\right)^2$	$\left(5x^3-\frac{4}{3}y^2\right)^2$	

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono quadrati di binomi

E13	$a^2+4ab+4b^2$	SI NO	$a^2-2ab-b^2$;	SI NO
E14	$25a^2+4b^4-20ab^2$	SI NO	$\frac{49}{4}a^4-21a^2b^2+9b^2$	SI NO
E15	$-25a^4-\frac{1}{16}b^4+\frac{5}{2}a^2b^2$	SI NO	$\frac{1}{4}a^6+\frac{1}{9}b^4+\frac{1}{6}a^3b^2$	SI NO

1.4.2 Quadrato di un polinomio

Si consideri il trinomio $A+B+C$, il suo quadrato sarà dato da:

$$(A+B+C)^2=(A+B+C)\cdot(A+B+C)=A^2+AB+AC+BA+B^2+BC+CA+CB+C^2=$$

$$=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si può scrivere

(2) $(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$

In generale, **il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei monomi che lo compongono e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno dei successivi**.

Nel caso di un polinomio composto da quattro monomi si ha:

$$(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$$

Completa i seguenti quadrati

E16 $(x+3y-1)^2=x^2+......+1+6xy-2x-6y$

E17 $\left(x^2-\frac{1}{2}y+1\right)^2=x^4+\frac{1}{4}y^2+...-x^2y+......-y$

E18 $\left(2x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=......+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}-2x^{\cdots}+2x^{\cdots}-......$

Calcola i seguenti quadrati di polinomi

E19 $(a+b-c)^2$ $\quad(a-b+c)^2$ $\quad(-a+b-c)^2$

E20 $(x^2+x+1)^2$ $\quad(x-x^2+1)^2$ $\quad(1-x-x^2)^2$

E21 $\left(\frac{1}{2}x+2y^2-3\right)^2$ $\quad(3x^2+2z-y^2)^2$

E22 $\left(3x^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{4}\right)^2$ $\quad(6a-3y^3-2z^2)^2$

E23 $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{4}x\right)^2$ $\quad\left(\frac{2}{3}y^2-3x^4+\frac{7}{4}z\right)^2$

E24 $(-2ba+4-6ab^2+5b^2)^2$

E25 $\left(5a^3-\frac{1}{2}ab-1-a\right)$

E26 $(2ab+3-4a^2b^2-2b^3)^2$

E27 $\left(2x^3y^2-y^2x+5x^2+\frac{1}{2}\right)^2$

E28 $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^2y-2xy+\frac{3}{8}y\right)^2$

1.4.3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Si consideri il seguente prodotto:

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

Pertanto, quando eseguiamo il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti i prodotti incrociati si annullano e rimangono i due prodotti del termine uguale per se stesso e dei due termini opposti, il primo prodotto risulterà sempre positivo, il secondo prodotto risulterà sempre negativo. Senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

In generale, **il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti si ottiene semplicemente moltiplicando tra di loro i due termini uguali e i due termini opposti.**.

Esempi

Per calcolare $(3a^2+5ab)\cdot(3a^2-5ab)$ moltiplichiamo $3a^2$ per se stesso e $(+5ab)(-5ab)$, otteniamo $9a^4-25a^2b^2$

Per calcolare $\left(-\frac{1}{4}x^2+b\right)\left(+\frac{1}{4}x^2+b\right)$ osserviamo che il monomio che cambia di segno è $\frac{1}{4}x^2$, nella forma generale (3) occorre porre $A=b$; $B=\frac{1}{4}x$. Il risultato è quindi $A^2-B^2=b^2-\frac{1}{16}x^2$.

Senza utilizzare la calcolatrice, calcola mentalmente il prodotto $28\cdot 32$.

Svolgimento $28\cdot 32=(30-2)(30+2)=900-4=896$

Senza utilizzare la calcolatrice, calcolare mentalmente i seguenti prodotti:

E29 $18\cdot 22$ $\quad 15\cdot 25$ $\quad 43\cdot 37$ $\quad 195\cdot 205$

Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

E30 $(x-1)(x+1)$ $\quad (a+1)(a-1)$ $\quad (b-2)(b+2)$

E31 $(a+2b)(a-2b)$ $\quad (2a+b)(2a-b)$ $\quad (2a+3b)(2a-3b)$

E32 $\left(l+\frac{1}{2}m\right)\left(l-\frac{1}{2}m\right)$ $\quad \left(\frac{1}{2}u+v\right)\left(\frac{1}{2}u-v\right)$ $\quad \left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)$

E33 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)$ $\quad (3a-5y)(-3a-5y)$ $\quad \left(-\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)\left(-\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}y\right)$

E34 $\left(x^2+\frac{1}{2}z\right)\left(x^2-\frac{1}{2}z\right)$ $\quad \left(\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)\left(-\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)$

E35 $\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)$ $\quad \left(-2a^3-\frac{7}{3}y\right)\left(-2a^3+\frac{7}{3}y\right)$

E36 $\left(5x^2-\frac{6}{5}y^3\right)\left(5x^2+\frac{6}{5}y^3\right)$ $\quad \left(a^5+\frac{1}{2}y^4\right)\left(a^5-\frac{1}{2}y^4\right)$

E37 $\left(-\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)\left(\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)$ $\quad \left(2x^5+\frac{3}{2}y^5\right)\left(2x^5-\frac{3}{2}y^5\right)$

1.4.4 Cubo di un Binomio

Si consideri il binomio $A+B$, il suo cubo sarà dato da:

$$(A+B)^3=(A+B)^2\cdot(A+B)=\left(A^2+2AB+B^2\right)(A+B)=A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+AB^2+B^3=$$
$$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Pertanto, senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(4) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

In generale, **il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio**.

Essendo $(A-B)^3=\left[A+(-B)\right]^3$, il cubo della differenza di due monomi si ottiene facilmente dal cubo della somma, quindi $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

E38 $\left(2a+b^2\right)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b^2+3\cdot(2a)\cdot\left(b^2\right)^2+\left(b^2\right)^3=$ ……………………………

E39 $(x-2y)^3=x^{\cdots}-6x^{\cdots}y+12xy^{\cdots}-\ldots y^{\cdots}$

E40 $(x+y)^3$ $\quad(x-y)^3$ $\quad(-x+y)^3$

E41 $(a+1)^3$ $\quad(a-1)^3$ $\quad(a+2)^3$

E42 $(x+2y)^3$ $\quad(y-2x)^3$ $\quad(2x+y)^3$

E43 $(xy-1)^3$ $\quad\left(x^2-2y\right)^3$ $\quad\left(x^2y-3\right)^3$

E44 $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^3$ $\quad\left(a-\frac{2}{3}b\right)^3$ $\quad\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$

E45 $\left(x^2-y^2\right)^3$ $\quad\left(-3xy^2+\frac{3}{2}zx^2\right)^3$ $\quad\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}xy^2z^3\right)^3$

E46 $\left(2x^2z+\frac{2}{3}y^2z^3x\right)^3$ $\quad\left(2ab^2c^2-3a^3b\right)^3$ $\quad\left(\frac{3}{4}a^2b^3c^2-\frac{1}{3}a^2bc^2\right)^3$

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono cubi di binomi

E47 $-a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ SI NO

E48 $a^9-6a^4b-12a^2b^2-8b^3$ SI NO

E49 $8a^9-b^3-6b^2a^3+12a^6b$ SI NO

E50 $\frac{1}{27}a^6-8b^3+4a^2b^2-\frac{2}{3}a^4b$ SI NO

1.4.5 Potenza n-esima di un binomio

Finora abbiamo calcolato le potenze del binomio $a+b$ fino all'ordine tre, in questo paragrafo ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a+b)^n$, con $n\in\mathbb{N}$. Osserviamo le potenze ottenute:

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 - a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Si può notare che:
- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell'esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*;
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto ***triangolo di Tartaglia***.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Figura 2. Il triangolo di Tartaglia

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & \searrow + \swarrow & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots
\end{array}
$$

Figura 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Sviluppa le seguenti potenze di binomio

E51 $(2a-b^2)^4 = (2a)^4 + 4\cdot(2a)^3\cdot(-b^2) + 6\cdot(2a)^2\cdot(-b^2)^2 + \dots\cdot(2a)\cdot(-b^2)^{\dots} + (-b^2)^{\dots} =$

E52 $(a+1)^5$ $\quad (x-1)^6$ $\quad (1-y)^7$ $\quad (x-a)^4$

E53 $(a+2)^5$ $\quad (a-2)^6$ $\quad (2a-1)^2$ $\quad (2x-3)^7$

E54 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^4$ $\quad \left(\frac{1}{2}a-1\right)^4$ $\quad \left(2-\frac{1}{2}a\right)^5$

E55 $\left(\frac{1}{3}-2x\right)^5$ $\quad (3x^2a-a^2)^5$ $\quad \left(\frac{2}{3}x^2-1\right)^6$

1.4.6 Prodotti notevoli applicati ai polinomi

Tutti i procedimenti di calcolo presentati in questo paragrafo si applicano non soltanto a monomi ma anche a polinomi.

Esempi

- Per calcolare $(a+2b-3c)^2$ possiamo anche applicare la regola (1) del quadrato del binomio dove $A=a+2b$ e $B=-3c$, si ottiene $(a+2b)^2+2(a+2b)(-3c)+(-3c)^2$, ecc.
- Per calcolare $(a+b+2c)\cdot(a+b-2c)$ possiamo applicare la regola (3) ponendo $A=a+b$ e $B=2c$, quindi il risultato A^2-B^2 diventa $(a+b)^2-(2c)^2$, sviluppando i quadrati si ottiene $a^2+2ab+b^2-4c^2$.
- Per calcolare $(a^3+2ab-b^2)(a^3-2ab+b^2)$ possiamo riscrivere il prodotto come $\left[a^3+(2ab-b^2)\right]\left[a^3-(2ab-b^2)\right]$, quindi moltiplicando soltanto il monomio uguale per se stesso e i binomi opposti $(a^3)^2-(2ab-b^2)^2 = a^6-(4a^2b^2-4ab^3+b^4) = a^6-4a^2b^2+4ab^3-b^4$.

E56 $\left[a+2(b-c)\right]\left[a-2(b-c)\right]$

E57 $\left[(a-2b)^2-a^3\right]\left[-a^3-(a-2b)^2\right]$

E58 $\left[(x+2y)^2-(x^2-2y)\right]\left[(x+2y)^2+(x^2-2y)\right]$

E59 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}-3b+\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}-3b-\frac{1}{3}ab\right)$

Altri esercizi

E60 $(x-y)^2+(x+y)(y-x)$

E61 $(a-3b)^2+(2a+3b)(2a-3b)-(a+2b)(b-2a)$

E62 $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(2x+\frac{1}{2}y^2\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(-x+\frac{1}{2}y\right)+(x-y)^3$

E63 $(a+2b-3c)(a+2b+3c)+\left(a^2-b\right)\left(-a^2-b\right)+(2a-b)^3$

E64 $\left[3x^2-(x+2y)(x-2y)\right]^2-2x\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y\right)^2$

E65 $\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{3}yx\right)^2+\left(\frac{2}{3}x^2y-\frac{4}{5}y^2z\right)^2$

E66 $\left(x^2+yx+\frac{2}{3}\right)^2-\left(3b^2+\frac{1}{2}a^4+2a^3+\frac{1}{3}a^2\right)^2$

E67 $\left(3x^2-4xy+\frac{2}{5}-y^2x+\frac{1}{2}y^3\right)^2+\left(2x^2y^2+\frac{3}{2}y^2\right)\left(2x^2y^2-\frac{3}{2}y^2\right)$

E68 $\left(\frac{2}{5}zx^3-3x^2y\right)\left(\frac{2}{5}zx^3+3x^2y\right)+\left(2x^2y^2z^3+\frac{1}{2}z^2x^2y\right)^3$

E69 $\left(1-x^n\right)^2-\left(2x^n-1\right)^2-\left(2x^{n+1}\right)^2+\left(x^{2n}-1\right)\left(x^{2n}+1\right)$

E70 Trova una regola generale per calcolare il cubo di un trinomio $(A+B+C)^3$

Versione 3 del 29.10.2008, hanno collaborato
Erasmo Modica: versione 1 teoria e integrazioni finali
Germano Pettarin: esercizi di base
Angela D'Amato: annotazioni
Angela Iaciofano: annotazioni
Antonio Bernardo: integrazioni, versione 2 e 3
Francesco Speciale: integrazioni