1.3.POLINOMI ED OPERAZIONI CON ESSI

1.3.1. Definizioni fondamentali

Un **polinomio è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi**.

Esempio

Sono polinomi: $6a+2b$; $5a^2b+3b^2$; $6x^3-5y^2x-1$; $7ab-2a^2b^3+4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in **forma normale** o **ridotto;** se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.
Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0 viene comunemente chiamato **termine noto.**

Esempio

Il polinomio: $3ab+b^2-2ba+4-6ab^2+5b^2$; ridotto in forma normale diventa $ab+6b^2-6ab^2+4$. Il termine noto è 4

E1 Riduci in forma normale il seguente polinomio: $5a^3-4ab-1+2a^3+2ab-a-3a^3$.
Svolgimento: Evidenziamo i termini simili e sommiamoli tra di loro
$5a^3-4ab-1+2a^3+2ab-a-3a^3$*, in modo da ottenere………………. Il termine noto è ……*

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio.
Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempio

$xy-5x^3y^2$ è un binomio;
$3ab^2+a-4a^3$ è un trinomio;
$a-6ab^2+3ab-5b$ è un quadrinomio.

Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono **uguali,** più precisamente vale il **principio di identità dei polinomi:** *due polinomi* $p(x)$ *e* $q(x)$ *sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.*
Se due polinomi sono invece formati da termini opposti, allora si dicono polinomi **opposti.**
Definiamo, inoltre, un polinomio **nullo** quando i suoi termini sono a coefficienti nulli. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo.

Esempi

- I polinomi: $\frac{1}{3}xy+2y^3-x; 2y^3-x+\frac{1}{3}xy$ sono uguali.
- I polinomi: $6ab-3a^2+2b^3; 3a^2-2b^3-6ab$ sono opposti

- Il polinomio: $7ab+4a^2-ab+b^3-4a^2-2b^3-6ab+b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo 0.

Il **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini.
Si chiama, invece, **grado di un polinomio rispetto ad una data lettera** l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio.

Esempi

- Il polinomio $2ab+3-4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado.
- Il grado del polinomio $a^3+3b^2a-4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più alto con cui tale lettera compare è 3.

E2 a) Individua il grado complessivo del polinomio: $x^2y^2-3y^3+5yx-6y^2x^3$.
Svolgimento: il grado del polinomio è ……perché il monomio di grado massimo è …………
b) Individua il grado del polinomio: $5a^2-b+4ab$ rispetto alla lettera b.
Svolgimento: il grado di tale polinomio rispetto alla lettera b è……perché…………………

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempio

Il polinomio: $a^3-b^3+ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

E3 Stabilire quali dei seguenti polinomi sono omogenei:
$a)x^3y+2y^2x^2-4x^4$; $b)2x+3y-xy$; $c)2x^3y^3-y^4x^2+5x^6$

Un polinomio si dice **ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera,** quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempio

Il polinomio: $\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2y-2xy^2+\frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e secondo le potenze crescenti della lettera y.

Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice **completo** se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n, compreso il termine noto.

Esempio

Il polinomio: $x^4-3x^3+5x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x. Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

OSSERVAZIONE
Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l'ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l'introduzione dei termini dei gradi mancanti con parte letterale uguale a 0.
Per esempio il polinomio $x^4 - x + 1 + 4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come: $x^4 + 0x^3 + 4x^2 - x + 1$.

E4 Individuare quali dei seguenti polinomi sono ordinati rispetto alla lettera x con potenze crescenti
$a) 2 - \frac{1}{2}x^2 + x$; $b) \frac{2}{3} - x + 3x^2 + 5x^3$; $c) 3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{7}{8}$

E5 Relativamente al polinomio $b^2 + a^4 + a^3 + a^2$
Il grado massimo è …… Il grado rispetto alla lettera a è …… Rispetto alla lettera b è ……

Il polinomio è ordinato? SI NO Completo? SI NO Omogeneo? SI NO

E6 Scrivere un polinomio di terzo grado nelle indeterminate a e b che sia omogeneo.
E7 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle indeterminate x e y che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda indeterminata.
E8 Scrivere un polinomio di quinto grado nelle indeterminate r e s che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata.
E9 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle indeterminate z e w che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata e decrescenti della seconda.
E10 Scrivere un polinomio di sesto grado nelle indeterminate x, y e z che sia completo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda variabile.

1.3.2. Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.
In definitiva diciamo che la **somma di due o più polinomi è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.**

E11 Calcolare la somma dei due polinomi: $2x^2 + 5 - 3y^2x$, $x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3$
Svolgimento: Indichiamo la somma $(2x^2 + 5 - 3y^2x) + (x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3)$*, eliminando le parentesi otteniamo il polinomio* $2x^2 + 5 - 3y^2x + x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3$*, sommando i monomi simili otteniamo* $\ldots x^2 - 4x^{\cdots}y^{\cdots} - \ldots xy + y^3 + \ldots$

La differenza di due polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l'opposto del secondo.

Esempio

$$3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - \left(2a^2 + ab - \frac{1}{2}b\right) = 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - 2a^2 - ab + \frac{1}{2}b = a^2 + \frac{-1-2}{2}ab + \frac{4+1}{2}b =$$

$$= a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{5}{2}b$$

Esegui le seguenti somme di polinomi

E12 **1)** $a+b-b$; **2)** $a+b-2b$; **3)** $a+b-(-2b)$ $[a;....;a+3b]$

E13 **1)** $a-(b-2b)$; **2)** $2a+b+(3a+b)$; **3)** $2a+2b+(2a+b)+2a$ $[.....;5a+2b;.......]$

E14 **1)** $\left(2a^2-3b\right)+\left(4b+3a^2\right)+\left(a^2-2b\right)$; **2)** $\left(3a^3-3b^2\right)+\left(6a^3+b^2\right)+\left(a^3-b^2\right)$ $\left[6a^2-b;.......\right]$

E15 **1)** $2a+b-(-3a-b)$; **2)** $2a-3b-(3b-2a)$; **3)** $(a+1)-(a-3)$ $[5a+2b;........;4]$

1.3.3. Prodotto di un polinomio per un monomio

Consideriamo il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy+5x^3y^2$; indichiamo il loro prodotto con $\left(3x^2y\right)\cdot\left(2xy+5x^3y^2\right)$. Per eseguire tale moltiplicazione applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, otteniamo: $\left(3x^2y\right)\cdot\left(2xy+5x^3y^2\right)=6x^3y^2+15x^5y^3$.

Pertanto **il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.**

Nel caso in cui il monomio è nullo il risultato della moltiplicazione è il monomio nullo.

Esempio

$$\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{4}{3}xy^3\right)=\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{4}{3}xy^3\right)=\frac{3}{2}x^5y^3+4x^4y^4$$

Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio:

E16 $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)$ *Svolgimento:* $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)=\frac{3}{2}x^{...}y^{...}+\frac{1}{4}x^{...}y^{...}$.

E17 1) (a + b)b; 2) (a - b)b; 3) (a + b)(-b) $\left[ab+b^2,...,-ab-b^2\right]$

E18 1) (a – b + 51)b; 2) (-a – b - 51)(-b); 3) $(a^2 - a)a$ $\left[ab-b^2+51b,...,a^3-a^2\right]$

E19 1) $(a^2 - a)(-a)$; 2) $(a^2 - a - 1)a^2$; 3) $-2a(a^2 - a - 1)(-a^2)$ $\left[...,...,2a^5-2a^4-2a^3\right]$

E20 1) $(a^2b - ab - 1)(ab)$; 2) $(ab - ab - 1)(ab)$ $[...,-ab]$

E21 1) $(a^2b - ab - 1)(a^2b^2)$; 2) $(a^2b - ab - 1)(ab)^2$ $\left[a^4b^3-a^3b^3a^2b^2,...\right]$

E22 1) $ab(a^2b - ab - 1)ab$ $[a^4b^3 - a^3b^3 - a^2b^2]$

E23 $\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{2}\right)\left(2a^2\right)$ $\left[\frac{1}{2}a^6+\frac{1}{4}a^5+a^4\right]$

E24 $\left(a^4+a^3+a^2\right)\left(b^4\right)$ $\left[a^4b^4+a^3b^4+a^2b^4\right]$

1.3.4. Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.

Si dice che un **polinomio è divisibile per un monomio**, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio di partenza; il monomio si dice **divisore** del polinomio.

OSSERVAZIONI

- Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero.
- Un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo.
- La divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio.
- **Il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore**

Esempio

Eseguiamo la seguente divisione tra polinomio e monomio:

$$\left(6x^5y+9x^3y^2\right):\left(3x^2y\right)=2x^{(5-2)}y^{(1-1)}+3x^{(3-2)}y^{(2-1)}=2x^3+3xy$$

Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi:

E25 $\left(2x^2y+8xy^2\right):\left(2xy\right)$

Svolgimento: $\left(2x^2y+8xy^2\right):\left(2xy\right)=x^{\dots}y^{\dots}+4x^{\dots}y^{\dots}=$......................

E26 $\left(6x^5y^4+3x^3y^6\right):\left(3x^2y^4\right)$

Svolgimento: $\left(6x^5y^4+3x^3y^6\right):\left(3x^2y^4\right)=$.....................................

E27 1) $(a^2 + a):a$; 2) $(a^2 - a):a$; 3) $(a^2 - a):(-a)$ $\quad [a+1,\dots,-a+1]$

E28 1) $(2a - 2) : \frac{1}{2}$; 2) $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4})$: $\frac{1}{2}$; 3) $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4})$: 2 $\quad \left[4a-4, a-\frac{1}{2},\dots\right]$

E29 1) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}\right):\frac{a}{2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{8}\right):\left(\frac{1}{2}a\right)$; 3) $(a^3 + a^2 - a):a$ $\quad \left[1-\frac{1}{2}a,\dots,a^2+a-1\right]$

E30 1) $(8a^3 + 4a^2 - 2a):2a$; 2) $(a^3b^2 + a^2 b- ab):ab$; 3) $(a^3b^2 + a^2 b- ab):b$ $\quad \left[4a^2+2a-1,\dots,a^3b+a^2-a\right]$

E31 1) $(a^3b^2 - a^2 b^3- ab^4):(-ab^2)$; 2) $(2a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{4}) : (\frac{a}{2})$ $\quad \left[-a^2+ab+b^2,\dots\right]$

1.3.5. Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo polinomio.

Consideriamo ora due polinomi $\left(a^2b+3a-4ab\right)$ e $\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)$, eseguiamo il prodotto, si ha

$$\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+3a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2-2a^3b^3+4a^2b-12a^2b^3$$

riducendo i termini simili $\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2+4a^2b-12a^2b^3$.

Esempi

- Eseguiamo la seguente moltiplicazione tra polinomi $\left(x-y^2-3xy\right)\left(-2x^2y+3y\right)$.

Procediamo moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo $\left(x-y^2-3xy\right)\left(-2x^2y+3y\right)=-2x^3y+3xy+2x^2y^3-3y^3+6x^3y^2-9xy^2$.
In questo caso non ci sono termini simili e quindi l'operazione è completata.

- Calcoliamo il prodotto dei polinomi $\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)$, $\left(\frac{3}{4}x+1\right)$.

$\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right)=\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^3-2x^2$, riduciamo i termini simili, otteniamo $\frac{3}{8}x^4-x^3-2x^2$.

E32 $\left(-4x+\frac{1}{2}x^3\right)\left(2x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$

Svolgimento: $\left(-4x+\frac{1}{2}x^3\right)\left(2x^2-3x+\frac{1}{2}\right)=-8x^{\cdots}+12x^{\cdots}-\dots x+x^{\cdots}-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{4}x^{\cdots}=$ ....

Esercizi sui prodotti di polinomi con esponenti letterali

E33 $\left(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}\right)\left(a^{n+1}+a^n\right)$ $[a^{2n+1}+a^{2n+4}]$

E34 $\left(a^n-a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^n-a^{n-1}\right)$ $[2a^{2n}-2a^{2n+1}+a^{2n+2}-a^{2n-1}]$

E35 $\left(a^n+a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^{n+1}-a^n\right)$ $[-a^{2n}+a^{2n+3}]$

E36 $\left(a^{n+2}+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}+a^{n+2}\right)$ $[a^{2n+4}+a^{2n+2}+2a^{2n+3}]$

E37 $\left(1+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}-2\right)$ $[a^{2n+2}-a^{n+1}-2]$

Altri esercizi

E38 (-a – 1 - 2) – (-3 – a + a) $[-a]$

E39 $(2a^2 - 3b) - [(4b + 3a^2) - (a^2 - 2b)]$ $[-9b]$

E40 $(2a^2 - 5b) - [(2b + 4a^2) - (2a^2 - 2b)] - 9b$ $[-18b]$

E41 $\left(\frac{1}{2}a-3+a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)$ $\left[-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}a^3\right]$

E42 $\left(5x+3xy+\frac{1}{2}y^2\right)\left(3x^2y\right)$ $\left[15x^3y+9x^3y^2+\frac{3}{2}x^2y^3\right]$

E43 $\left(\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}xy\right)(6xy)$ $\left[4x^2y^3+3x^4y-\frac{9}{2}x^2y^2\right]$

E44 $\left(a^3b^2-a^4b+a^2b^3\right):\left(a^2b\right)$ $\left[ab-a^2+b^2\right]$

E45 $\left(a^2-a^4+a^3\right):\left(a^2\right)$ $\left[1-a^2+a\right]$

E46 $\left(\frac{1}{2}a^2b-2ab^2+\frac{3}{4}a^3b\right):\left(\frac{1}{2}ab\right)$ $\left[a-4b+\frac{3}{2}a^2\right]$

E47 $\left(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}\right):a^{1+n}$ $\left[1-a+a^2\right]$

E48 $\left(3x^2+6xy-4y^2\right)\left(\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}y^2\right)$ $\left[\frac{3}{2}x^3y+x^2y^2-6xy^3+\frac{8}{3}y^4\right]$

E49 $\left(1+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}-2\right)$ $\left[a^{2n+2}-a^{n+1}-2\right]$

E50 $\left(a^{n+1}-a^n\right)\left(a^{n+1}+a^n\right)\left(a^{2n+2}+a^{2n}\right)$ $\left[a^{4n+4}-a^{4n}\right]$

E51 $2(x-1)(3x+1)-\left(6x^2+3x+1\right)+2x(x-1)$

E52 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)a^3-\left(\frac{1}{3}ab-1\right)\left[2a^2(a-b)-a\left(a^2-2ab\right)\right]$

E53 Se si raddoppiano i lati di un rettangolo, come varia il suo perimetro?

E54 Se si raddoppiano i cateti di un triangolo rettangolo, come varia la sua area?

E55 Se si raddoppiano gli spigoli a, b, e c di un parallelepipedo, come varia il suo volume?

E56 Come varia l'area di un cerchio se si triplica il suo raggio?

E57 Determinare l'area di un quadrato avente come dimensioni $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a^2b$.

E58 Determinare la superficie laterale di un cilindro avente raggio di base pari a x^2y e altezza $\frac{1}{5}xy^2$.

Versione 3 del 28.10.2008, hanno collaborato
Francesco Speciale: teoria versione 1
Germano Pettarin: esercizi
Antonio Bernardo: revisione e integrazioni
Erasmo Modica: integrazioni
Angela Iaciofano: revisione
Luciano Sarra: revisione