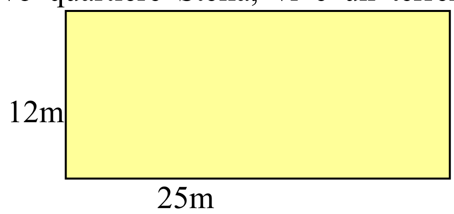
1.1 ESPRESSIONI LETTERALI E VALORE NUMERICO DI UN'ESPRESSIONE

1.1.1. Lettere per esprimere formule

In tutte le villette a schiera di recente costruzione del nuovo quartiere Stella, vi è un terreno rettangolare di larghezza 12m e lunghezza 25m. Quanto misura la superficie del terreno?

Il prodotto delle dimensioni rappresenta la misura richiesta:

$S=(25\cdot 12)\mathrm{m}^2=300\mathrm{m}^2$



Il semplice problema che abbiamo risolto è relativo ad un caso particolare; quel terreno con quelle dimensioni. Ma se le dimensioni fossero diverse?

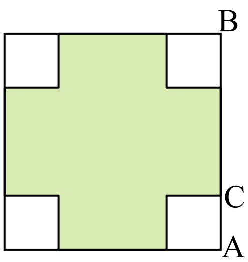
La procedura per determinare la misura della superficie ovviamente è sempre la stessa e la possiamo esprimere con una formula: $A=b\cdot h$, nella quale abbiamo indicato con *b* la misura di una dimensione e con *h* la misura dell'altra dimensione, assegnate rispetto alla stessa unità di misura.

La formula ha carattere generale; essa serve ogni qualvolta si chiede di determinare la superficie di un rettangolo, note le misure delle dimensioni (base e altezza) rispetto alla stessa unità di misura.

In geometria si utilizzano tantissime formule che ci permettono di determinare perimetro e area delle figure piane, superficie laterale e totale e volume dei solidi. Nelle formule le lettere sostituiscono le misure di determinate grandezze, tipiche di quella figura o di quel solido.

E1 Esprimi con una formula l'area della superficie della zona colorata, indicando con l la misura del lato AB e con b la misura di AC.

Svolgimento: l'area del quadrato è…., l'area di ciascuno dei quadratini bianchi è…. Pertanto l'area della superficie in grigio è….



1.1.2. Lettere per descrivere schemi di calcolo

L'insegnante chiede agli alunni di scrivere "il doppio della somma di due numeri".

- Antonella scrive: $2\cdot(3+78)$
- Maria chiede "quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta"
- Giulia scrive: $2\cdot(a+b)$

Maria si è posta il problema ma non ha saputo generalizzare la richiesta. Antonella si è limitata ad un caso particolare. Giulia ha espresso con una formula l'operazione richiesta dall'insegnante.

L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo

E2 Scrivi l'espressione algebrica letterale relativa alla frase " eleva al quadrato la differenza tra il cubo di un numero e il doppio del suo quadrato"

Svolgimento: detto a il numero generico, il cubo di a si indica con…, il doppio quadrato di a si indica con … e infine il quadrato della differenza sarà: …………

E3 Traduci in parole della lingua italiana il seguente schema di calcolo: $(a-b)^3$

Svolgimento: indicati con a e b due generici numeri la traduzione dell'espressione algebrica in parole sarà: "…………………"

DEFINIZIONE: Un'**espressione letterale** o **espressione algebrica** è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.

Osservazione 1: per scrivere un'espressione letterale ci si deve attenere a regole precise, quelle stesse che utilizziamo per scrivere espressioni numeriche.
Per esempio, la scrittura $3 \cdot 4 +$ non è corretta, in quanto il simbolo + dell'addizione deve essere seguito da un altro numero per completare l'operazione. Analogamente non è corretta l'espressione letterale $a \cdot c +$
Osservazione 2: come nelle espressioni numeriche le parentesi indicano la priorità di certe operazioni rispetto ad altre.
La formula $a \cdot (x + y)$ specifica "il prodotto di un numero per la somma di due altri" . Essa è diversa da $a \cdot x + y$ che rappresenta "la somma del prodotto di due numeri con un terzo numero".

E4 Individua tra quelle sottostanti le espressioni letterali scritte correttamente:

1) $b \cdot \frac{4}{5} + \left(3 - \frac{7}{2}\right) \cdot a - a$ 2) $a \cdot +2 - b^4$ 3) $(x \cdot (a-b)^2 + (x-3)$

4) $x^y - a:2$ 5) $-\ \ a + 4b - c$

Svolgimento: sono corrette la 1, la 4 e la 5; la 2 presenta un doppio segno di operazioni $\cdot +$ *, la 3 ha la prima parentesi tonda che non è stata chiusa.*

1.1.3. Lettere per esprimere proprietà

Per esprimere le proprietà delle operazioni tra numeri si usano le lettere per indicare che valgono per numeri qualsiasi.
La scrittura $(a + b) + c = a + (b + c)$ esprime la proprietà associativa dell' addizione. In essa le lettere a, b, c indicano numeri qualsiasi. I due schemi di calcolo ci dicono che per sommare tre numeri, è indifferente aggiungere alla somma dei primi due il terzo oppure aggiungere al primo la somma degli altri due.

E5 Collega con una freccia la proprietà dell'operazione con la sua scrittura attraverso lettere:

PROPRIETÀ	ESPRESSIONE
Commutativa dell'addizione	$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
Associativa della moltiplicazione	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva del prodotto rispetto alla somma	$a + b = b + a$

E6 Esprimere con le lettere la proprietà commutativa della moltiplicazione
Svolgimento: considerati a e b due numeri qualsiasi, la proprietà commutativa si esprime per mezzo dell'espressione………; cioè ……………………….

1.1.4. Il valore numerico di un'espressione letterale

Ogni espressione letterale rappresenta uno schema di calcolo in cui le lettere che vi compaiono sostituiscono numeri. L'espressione letterale $2 \cdot x^2 + x$ traduce una catena di istruzioni che in linguaggio naturale sono così descritte: "prendi un numero; fanne il quadrato; raddoppia quanto ottenuto; aggiungi al risultato il numero preso inizialmente".

Questa catena di istruzioni si può anche rappresentare in modo schematico
$x \to x^2 \to 2\cdot x^2 \to 2\cdot x^2 + x$ e usata per istruire un esecutore a "calcolare" l'espressione letterale quando al posto della lettera x si sostituisce un numero.

Calcoliamo il valore dell'espressione $2\cdot x^2 + x$, sostituendo alla lettera il numero naturale 5.

Seguiamo la schematizzazione $x \to x^2 \to 2\cdot x^2 \to 2\cdot x^2 + x$ e otteniamo: $5 \to 25 \to 50 \to 55$.
Il risultato è 55.
Più brevemente scriviamo 5 nell'espressione letterale al posto di x: otteniamo l'espressione numerica $2\cdot 5^2 + 5$ il cui risultato è 55.
E se al posto di x sostituiamo -5? Cambia il risultato?

Bene, eseguiamo la sostituzione: $2\cdot(-5)^2 + (-5) =$ …….. Lasciamo a te il calcolo finale!
Ti sei accorto che il risultato è cambiato.

DEFINIZIONE: In un'espressione letterale **le lettere** rappresentano **le variabili** che assumono un preciso significato quando vengono sostituite da numeri.

DEFINIZIONE: Chiamiamo **valore di un'espressione letterale** il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere sostituiamo un numero. Il valore dell'espressione letterale **dipende dal valore assegnato alle sue variabili**.

E7 Consideriamo l'espressione letterale $E = -3\cdot a + 2\cdot(-a+1)$.
Osserviamo che vi compare una sola variabile, la lettera a; supponiamo che E rappresenti uno schema di calcolo tra numeri interi relativi. Determiniamo il valore dell'espressione per alcuni valori assegnati alla sua variabile:

$a = -2 \quad \to \quad -3\cdot(-2) + 2\cdot\left(-(-2)+1\right) = +6 + 2\cdot(2+1) = 6+6 = 12$

$a = 1 \quad \to \quad -3\cdot(1) + 2\cdot\left(-(1)+1\right) = -3 + 2\cdot(......) = ...$

$a = -1 \quad \to$ ………………

Possiamo costruire una tabella ponendo in una riga i valori assegnati alla variabile, in un'altra riga i corrispondenti valori ottenuti per E:

a	-2	1	-1
E	12	-3	

E8 L'espressione letterale $E = -3\cdot a + 2\cdot(-a+1)$ rappresenta ora uno schema di calcolo tra numeri razionali relativi; completa la tabella:

a	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{2}$	-11	0
E				

Risposte: $-2; \frac{39}{2}; 57; 2$.

Conclusione: ad ogni valore razionale attribuito alla variabile, corrisponde un numero razionale come valore dell'espressione assegnata.

E9 Calcola il valore dell'espressione letterale $E = \frac{3}{7}\cdot a\cdot b - \frac{1}{2}\cdot(a-b) + a - b$ le cui variabili a, b rappresentano numeri razionali, per i valori assegnati nella tabella sottostante:

Svolgimento: se vogliamo calcolare il valore dell'espressione letterale dobbiamo scegliere due numeri razionali, uno da assegnare alla variabile a, l'altro alla variabile b, cioè dobbiamo scegliere una coppia di numeri razionali.

A	3	0	2	$\frac{-3}{2}$
B	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
E				

Risposte: $(3,-3)\rightarrow -\frac{6}{7}$; $\left(0,-\frac{1}{2}\right)\rightarrow \frac{1}{4}$; $(2,0)\rightarrow 1$; $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\rightarrow \frac{27}{28}$

In conclusione, ad ogni coppia di numeri razionali, corrisponde un numero razionale come valore dell'espressione assegnata.

E10 Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $3a(a-b)$ per $a=1$, $b=1$

Svolgimento: $3\cdot 1\cdot(1-1)=3\cdot 1\cdot 0=0$.

E11 Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $\frac{a}{a-3}+\frac{b}{3-b}$ per a = -1, b = 0

Svolgimento: $\frac{-1}{-1-3}+\frac{0}{3-0}$ = ….

E12 Calcoliamo il valore dell' espressione letterale $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$ costruita con le due variabili, x e y che rappresentano numeri razionali. L'espressione letterale assegnata traduce il seguente schema di calcolo:" la **divisione** tra la differenza di due numero e il triplo del primo numero"

Completa la seguente tabella:

x	Y	E
$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	
$\frac{19}{3}$	0	
$\frac{3}{4}$	0	
-4	-2	

Ti sarai accorto che nelle caselle colorate compare lo stesso valore per E: perché secondo te succede questo fatto?

Vi sono secondo te altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

1.1.5. Condizione di esistenza di un'espressione letterale

Ti proponiamo adesso alcuni casi particolari, sempre riferiti alla stessa espressione $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$

1° caso:

x	Y	E
1	1	0

Il numeratore della frazione è 0, mentre il denominatore vale 3; il calcolo finale è dunque $\frac{0}{3}=0$.

E13 Vi sono secondo te altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

2° caso:

x	Y	E
0	25	

Invece di mettere un valore ad E, abbiamo messo dei punti di domanda perché in questo caso: il numeratore della frazione è -25 mentre il denominatore vale 0;
il calcolo finale è dunque $\frac{-25}{0}=$ Impossibile.

E14 Vi sono secondo te altre coppie che rendono impossibile il calcolo del valore per E?

Non possiamo allora concludere che per ogni coppia di numeri razionali (x,y) l'espressione E assume un numero razionale. Per poter calcolare il valore di E non dobbiamo scegliere coppie aventi x uguale a zero.
Scriveremo quindi come premessa alla ricerca dei valori di E la **Condizione di Esistenza** $x\neq 0$.
L'esempio appena svolto ci fa capire che di fronte a una espressione letterale dobbiamo con molta attenzione riflettere sullo schema di calcolo che essa rappresenta prima di assegnare valori alle variabili che vi compaiono.
Se l'espressione letterale presenta una divisione in cui il divisore contiene variabili, dobbiamo stabilire la **C**ondizione di **E**sistenza, eliminando quei valori che rendono nullo il divisore.
Per comprendere la necessità di porre le condizioni d'esistenza ricordiamo la definizione di divisione.
Quanto fa 15 diviso 5? Perché?
In forma matematica: $15:5=3$ perché $3\cdot 5=15$. Quindi, generalizzando; $a:b=c$ se $c\cdot b=a$.
Vediamo ora cosa succede quando uno dei numeri è 0.
Quanto fa $0:5$?
Devo cercare un numero che moltiplicato per 5 mi dia 0: trovo solo 0; infatti $0\cdot 5=0$.
Quanto fa $15:0$?
Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 15: non lo trovo; infatti nessun numero moltiplicato per 0 fa 15. Quindi, $15:0$ è impossibile perché non esiste x per il quale $x\cdot 0=15$.
Quanto fa $0:0$?
Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 0: non né trovo solo uno. Infatti, qualunque numero moltiplicato per 0 fa 0. Per esempio, $0:0=33$ infatti $33\cdot 0=0$, anche $0:0=-189,67$

infatti $-189{,}67\cdot 0=0$, $0:0=0$ infatti $0\cdot 0=0$, ancora $0:0=10^{99}$ infatti $10^{99}\cdot 0=0$. Quindi $0:0$ è indeterminato, perché non è possibile determinare un x tale che $x\cdot 0=0$, per qualunque valore di x si ha $x\cdot 0=0$.

Consideriamo l'espressione letterale $E=\frac{a-b}{a+b}$ dove a e b rappresentano numeri razionali.
Premettiamo :

- ✓ la descrizione a parole dello schema di calcolo: "divisione tra la differenza di due numeri e la loro somma"
- ✓ la domanda che riguarda il denominatore: "quando sommando due numeri razionali otteniamo 0 al denominatore? "
- ✓ la **C**ondizione di **E**sistenza: " a e b non devono essere numeri opposti".

Siamo ora in grado di completare la tabella:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{-19}{2}$
B	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E					

Dalla **C**ondizione di **E**sistenza, ci accorgiamo subito che la prima coppia e la quarta sono formate da numeri opposti, pertanto non possiamo con esse calcolare il valore di E. L'ultima coppia è formata da numeri uguali pertanto la loro differenza è 0; il numeratore si annulla e quindi il valore di E è 0. Per la coppia $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ il valore di E è -1 mentre è 1 per la coppia $\left(\frac{3}{4},0\right)$ vale 1.

La tabella verrà quindi così completata

A	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{-19}{2}$
B	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E	impossibile	-1	1	impossibile	0

E15 Adesso prova tu con l'espressione $E=-\frac{x-2}{2x^2}$ completando la tabella:

x	2	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$
E				

E16 Calcola il valore numerico dell'espressione: $\frac{3x-1}{x}$ per $x = 0$

Svolgimento: Sostituendo alla x il valore assegnato si ha una divisione per........... e quindi………

Altri esercizi

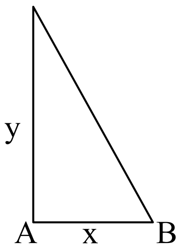
E17 Scrivi la formula che ci permette di calcolare l'area di un trapezio avente base maggiore $B=5$ cm, base minore $b=2$ cm e altezza $h=4$ cm.

E18 Scrivi la formula che ci consente di calcolare il perimetro di un quadrato di misura l.

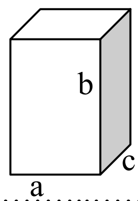
E19 Determina l'altezza h_i relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC.

CASO NUMERICO: $\overline{AB}=8\text{m}.\quad \overline{AC}=15\text{m}.$

CASO GENERALE: Indica con x e y le misure dei cateti, e determina la formula per calcolare la misura di h_i.



E20 Il volume della scatola avente le dimensioni di 7cm. 10cm. 2cm. è ………



Generalizza la questione indicando con a, b, c la misura delle sue dimensioni …………..……

Se raddoppiamo ciascuna dimensione allora il volume diventa

$$\alpha)\,2\cdot a\cdot b\cdot c \qquad \beta)\,a^2\cdot b^2\cdot c^2 \qquad \gamma)\,6\cdot a\cdot b\cdot c \qquad \delta)\,8\cdot a\cdot b\cdot c$$

Scrivi sotto forma di espressioni letterali le seguenti frasi

E21 Moltiplica a per l'inverso di a. $\left[a\cdot\frac{1}{a}\right]$

E22 Moltiplica a per l'opposto del cubo di a.

E23 Sottrai ad a l'inverso di b. $\left[a-\frac{1}{b}\right]$

E24 Somma al triplo di a il doppio quadrato di b.

E25 Sottrai il doppio di a al cubo di a. $\left[a^3-2a\right]$

E26 Moltiplica il reciproco di b per il quadrato dell'inverso di a.

E27 Somma al cubo di a il quadrato della somma di a e b.

E28 Dividi il quadrato di a per il triplo cubo di b.

E29 Moltiplica il quadrato di b per l'inverso del cubo di a.

Scrivi con una frase le seguenti espressioni:

E30 $3a$. [Il triplo di a]

E31 $2b-5a$.

E32 $a\cdot\frac{1}{a}$.

E33 $\frac{2a}{3b^2}$. [Dividi il doppio di a per il triplo del quadrato di b]

E34 $(a+b)^2$.

E35 $\frac{3x+y}{2x^2}$

Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

E36 $4a+a^3$ per $a=2$ $[16]$

E37 $2a+5a^2$ per $a=-1$ $[3]$

E38 $3x+2y^2(xy)$ per $x=1; y=-\frac{1}{2}$ $\left[\frac{11}{4}\right]$

E39 $a^2-b^{-1}+ab$ per $a=2; b=\frac{1}{2}$ $[3]$

E40 $3a^2b-7ab+a$ per $a=1; b=3$ $[-11]$

E41 $3xy-2x^2+3y^2$ per $x=\frac{1}{2}; y=2$ $\left[\frac{29}{2}\right]$

E42 Calcola il valore numerico della seguente espressione: $3x^2-\frac{1}{4}x^2$ per $x=\frac{1}{2}$

Svolgimento: $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\frac{11}{16}$.

E43 $\frac{2}{3}\cdot a\left(a^2-b^2\right)$ per $a=-3; b=-1$ $[-16]$

E44 $\frac{xy}{x}+3xy^3$ per $x=2; y=-1$ $[-7]$

E45 $\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}+2a+3b$ per $a=\frac{1}{4}; b=-2$ $\left[\frac{49}{8}\right]$

E46 $3x^3+2xy\left(\frac{x^2}{y}\right)+2y^2$ per $x=-2; y=\frac{3}{4}$ $\left[-\frac{55}{8}\right]$

E47 $\frac{(4a-7b)}{(2a+3b)^3}\cdot ab^2$ per $a=-\frac{1}{2}; b=1$ $\left[\frac{9}{16}\right]$

E48 $\frac{x}{x+3}+y^2-\frac{xy-3x+y}{(xy)^2}$ per $x=3; y=\frac{1}{3}$ $\left[\frac{149}{18}\right]$

E49 Calcola il valore numerico della seguente espressione: $5a^2b$ per $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{5}$

Svolgimento: sostituiamo alle lettere il valore assegnato ed otteniamo che $5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)=\dots.$

E50 $(4a-2b)\cdot\frac{2a^2}{3b^3}\cdot\frac{3}{4}ab+a^3$ per $a=1; b=-1$ $[4]$

E51 $\frac{4x^2-5xy+3y}{6x+y^2}$ per $x=-1; y=2$ $[-10]$

E52 $\mathrm{E}=\frac{3}{2}\cdot a^2+\frac{1}{2}\cdot a-1$ per $a=0$; $a=-1$; $a=1$

E53 $\mathrm{E}=-a^2\cdot b\cdot c^3$ per $(a=0\ ,\ b=1\ ,\ c=-1)$; $\left(a=-1\ ,\ b=\frac{9}{16}\ ,\ c=\frac{4}{3}\right)$

E54 $\mathrm{E}=-\frac{3}{2}\cdot a+2\cdot b^2+11$ per $\left(a=-2\ ,\ b=-\frac{1}{2}\right)$; $\left(a=\frac{2}{3}\ ,\ b=0\right)$

E55 $E = 2\cdot x^5 - 8\cdot x^4 + 3\cdot x^3 + 2\cdot x^2 - 7\cdot x + 8$ per $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$

E56 $E = -a^2 + \frac{1}{a} - 3\cdot a^3$ per $a = \frac{1}{3}$; $a = -1$; $a = 0$; $a = 1$

Sostituendo alle lettere i numeri, affianco indicati, stabilisci se le seguenti espressioni hanno significato:

E57 $\frac{x+3}{x}$ per $x = 0$ SI NO

E58 $\frac{x^2+y}{xy}$ per $x = 3; y = 0$ SI NO

E59 $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ per $a = 1; b = 1$ [non ha significato perché $\frac{2}{0}$ non è un numero]

E60 $\frac{5x^2+3y-xy}{(x^2+y)^3}$ per $x = 2; y = -2$ SI NO

E61 $\frac{a^3+b+6a^2}{a^3+b^2+3ab-3a^2}$ per $a = 1; b = \frac{4}{3}$ SI NO

Lettere per verificare/ confutare uguaglianze o proprietà

E62 Sostituendo alle lettere numeri razionali arbitrari, determina se le seguenti uguaglianze tra formule sono **V**ere o **F**alse

$a^2 + b^2 = (a+b)^2$ **V** **F**

$(a-b)\cdot(a^2 + a\cdot b + b^2) = a^3 - b^3$ **V** **F**

$(5\cdot a - 3\cdot b)\cdot(a+b) = 5\cdot a^2 + a\cdot b - 3\cdot b^2$ **V** **F**

E63 Se n è un qualunque numero naturale, l'espressione $2\cdot n + 1$ dà origine

□ad un numero primo □ a un numero dispari

□ ad un quadrato perfetto □ ad un numero divisibile per 3

E64 Quale delle seguenti formule rappresenta, qualunque sia il valore naturale attribuito ad n, un multiplo di 5?

□ $5+n$ □ n^5 □ $5\cdot n$ □ $\frac{n}{5}$

Versione 5 del 31.10.2008, hanno collaborato:
Cristina Mocchetti: versione 1
Francesco Speciale: revisione e integrazioni
Antonio Bernardo: revisione e integrazioni
Michela Todeschi: integrazioni
Lucian Sarra: revisione
Angela Iaciofano: revisione
Angela D'Amato: revisione