L’insieme dei numeri Relativi

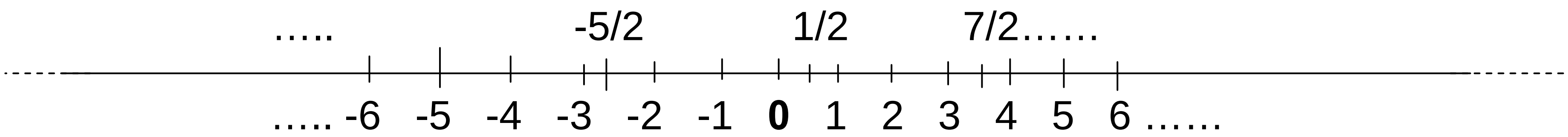
ITIS Feltrinelli – anno scolastico 2007-2008

Ampliamento di N e Q: i relativi

Nell'insieme N non possiamo fare operazioni quali **5-13** perché il risultato non è un numero Naturale (la divisione non è un'operazione interna ad N).

In Q non possiamo allo stesso modo fare operazioni del tipo: 1/3 – 1/2

Dobbiamo introdurre dei nuovi numeri, i **relativi**, ampliando l'insieme dei numeri naturali e dei numeri razionali. Ma relativi a cosa? Allo zero, naturalmente, perché immaginando una linea ideale (infinita da un lato e dall'altro) su cui rappresentiamo i numeri, con lo zero al centro, chiameremo positivi i numeri maggiori dello zero (cioè a destra) e negativi quelli minori di zero (cioè a sinistra).



Preso un numero con segno, es - 3 oppure + 5 (se un numero non ha il segno davanti, si sottintende che sia positivo)

Si chiama **valore assoluto** la cifra senza il segno.

Dalla figura potete notare che vale la **regola**:

-Un numero positivo è sempre maggiore di un numero negativo

-Tra due numeri positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore es. 5>3

-Tra due numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore es. -3>-5

Numeri con lo stesso segno si dicono **concordi** es. +5 e +3 oppure -2 e -1/2

Numeri con segno diverso si dicono **discordi** es. +5 e -3 oppure -2 e +1/2

L’insieme Z e l’insieme Q

Se si amplia l’insieme dei numeri naturali, si ottengono i due insiemi:
Z^+ dei numeri **interi positivi**
Z^- dei numeri **interi negativi**
L’unione di Z^+ e Z^- e dell’insieme che contiene lo zero si indica con Z:

$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$ e si chiama **insieme dei numeri interi relativi**

Allo stesso modo, otteniamo anche da Q due nuovi insiemi, **Q^+** e **Q^-**

$Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ prende il nome di insieme dei **numeri razionali relativi**.

Notate che Z è un sottoinsieme di Q, esattamente come N era sottoisieme di Q

L’addizione e le sue proprietà

La somma di due numeri relativi prende il nome di **somma algebrica** e comprende sia la tradizionale somma sia la sottrazione.

Infatti la sottrazione può essere pensata come la somma di un numero negativo ad un numero positivo:

Es. 5 – 3 = + 5 + (-3) ovvero al numero 5 sommo il numero -3

Dunque si dice **somma di due numeri relativi concordi** il numero relativo che ha lo stesso segno degli addendi e come valore assoluto la somma dei due valori assoluti.

Es. 3 + 5 = 8

Si dice **somma di due numeri relativi discordi** il numero relativo che ha lo stesso segno dell’adendo di valore assoluto maggiore e per valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e il valore assoluto minore.

Es. 5 – 3 = + 2   -7 + 4 = - 3

Proprietà dell’addizione:

- la somma algebrica è chiaramente un’operazione interna sia a Z sia a Q perché il risultato ricade sempre in questi insiemi
- è commutativa
- è associativa
- esiste l’elemento neutro, che è lo zero
- esiste l’opposto: ogni numero relativo ha un simmetrico rispetto all’addizione, che si dice opposto (lo zero è l’opposto di se stesso)

Es. +5 + (-5) = 0   +(3/2) + (-3/2) = 0

Le somme nelle espressioni algebriche

Dalle proprietà dell'addizione derivano **alcune regole** che possono risultare molto utili quando facciamo calcoli algebrici:

- se in una addizione compaiono numeri opposti, si possono eliminare direttamente
- se in un'addizione compaiono addendi discordi, si possono raggruppare tutti quelli positivi e tutti quelli negativi (proprietà commutativa), farne le somme parziali (proprietà associativa) e poi farne le somme.

Es. 6 + 2 – 5 + 3 – 12 - 2 = (6 + 3) + (-12 – 5) = 9 – 17 = - 8

Le operazioni in cui compaiono più numeri con diversi segni si dicono **espressioni algebriche.** Nelle espressioni possono comparire anche le parentesi, per modificare la precedenza delle operazioni (ricordate che, senza le parentesi, l'elevamento a potenza ha la precedenza su tutte le operazioni, poi si eseguono moltiplicazioni e divisioni e poi somme e sottrazioni nell'ordine in cui si incontrano).

Quando abbiamo le parentesi svolgiamo prima i calcoli tra le parentesi, ricordando che dobbiamo svolgere per primi i calcoli tra parentesi tonde ( ), poi quelli tra parentesi quadre [ ] e infine quelli tra parentesi graffe { }.

Inoltre, se davanti alla parentesi c'è un segno, + o -, ci si comporta così:

- se davanti alla parentesi il segno è +, i segni dei numeri tra parentesi non cambiano
- se davanti alla parentesi il segno è -, dobbiamo cambiare tutti i segni delle cifre tra parentesi (eventualmente dopo aver svolto i calcoli)

Esempi: -(8 + 3) + 2 = - (+11) + 2 = - 11 + 2 = - 9

La moltiplicazione e le sue proprietà

Il **prodotto** di due numeri relativi è il numero relativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e per segno:

- il segno + se i due numeri sono concordi
- il segno - se i due sono discordi

Possiamo considerare la regola dei segni attraverso la tabella:

·	+	-
+	+	-
-	-	+

Due numeri relativi si dicono **reciproci** o **inversi** se il loro prodotto è uguale a +1

Esempi: il reciproco di + 3 è + 1/3
il reciproco di -3/4 è - 4/3
il reciproco di -1 è – 1

Proprietà della moltiplicazione:

- è un’operazione interna in Z e in Q
- è commutativa e associativa
- è distributiva rispetto all’addizione e alla sottrazione (cioè rispetto alla somma algebrica)
- esiste l’elemento neutro (che è il numero +1)
- ogni numero relativo, escluso lo zero, ha un reciproco, cioè un simmetrico rispetto alla moltiplicazione.

L'elevamento a potenza

Nel caso di una potenza a^n con esponente intero positivo:
Se a > 0 la potenza è positiva es. $2^2 = 4$ $(1/2)^3 = 1/8$
Se a < 0 la potenza è positiva se n è pari, negativa se n è dispari

Es. $-3^2 = + 9$ $-(3/4)^3 = -9/64$

Nel caso di una potenza a^{-n} con esponente intero negativo è uguale all'inverso della potenza di base a ed esponente positivo n:
$a^{-n} = 1/ a^n$

Esempi

$$(+2)^{-3} = \frac{1}{(+2)^3} = \frac{1}{8} \qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^{-3}} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

Proprietà delle potenze

La potenza con esponente 0 da' sempre 1.
La potenza con esponente 1 lascia il numero invariato.

Proprietà delle potenze:

- prodotto di due potenze con la stessa base: $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

  esempi: $(+2)^2 \cdot (+2)^3 = (+2)^{2+3} = (+2)^5$

  $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$ $\qquad (-2)^{-3} \cdot (-2)^2 = (-2)^{-3+2} = (-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$

- divisione tra due potenze con la stessa base: $\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$

  esempi: $(+2)^5 : (+2)^2 = (+2)^{5-2} = (+2)^3$

  $(+2)^2 : (+2)^{-3} = (+2)^{2-(-3)} = (+2)^{2+3} = (+2)^5$ $\qquad (-3)^2 : (-3)^5 = (-3)^{2-5} = (-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

- potenza di una potenza: $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

  esempi:

  $\left[(-3)^2\right]^3 = (-3)^{2 \cdot 3} = (-3)^6$ $\qquad \left[(+2)^2\right]^{-3} = (+2)^{2 \cdot (-3)} = (+2)^{-6}$

- prodotto di due potenze con lo stesso esponente: $\mathbf{a^m + b^m = (a \cdot b)^m}$

  esempi:

  $(+3)^3 \cdot (-2)^3 = \left[(+3) \cdot (-2)\right]^3 = (-6)^3$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)\right]^2 = \left(+\frac{3}{10}\right)^2$

- divisione di due potenze con lo stesso esponente: $\mathbf{a^n : b^n = (a:b)^n}$

  esempi:

  $(+3)^3 : (+5)^3 = \left[(+3) : (+5)\right]^3 = \left(+\frac{3}{5}\right)^3$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(+\frac{3}{5}\right)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{3}{5}\right)\right]^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right)\right]^2 = \left(-\frac{3}{10}\right)^2$