

# L'insieme dei numeri Relativi

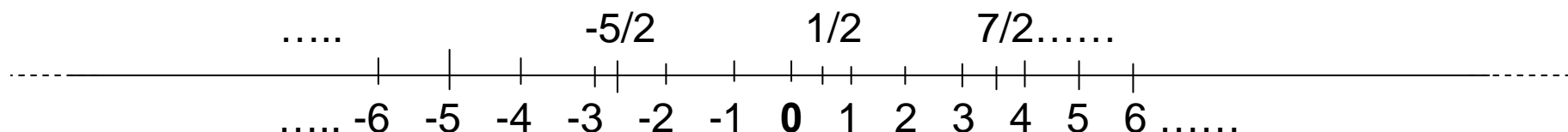
ITIS Feltrinelli – anno scolastico 2007-2008

# Ampliamento di N e Q: i relativi

Nell'insieme N non possiamo fare operazioni quali **5-13** perché il risultato non è un numero Naturale (la divisione non è un'operazione interna ad N).

In Q non possiamo allo stesso modo fare operazioni del tipo:  $1/3 - 1/2$

Dobbiamo introdurre dei nuovi numeri, i **relativi**, ampliando l'insieme dei numeri naturali e dei numeri razionali. Ma relativi a cosa? Allo zero, naturalmente, perché immaginando una linea ideale (infinita da un lato e dall'altro) su cui rappresentiamo i numeri, con lo zero al centro, chiameremo positivi i numeri maggiori dello zero (cioè a destra) e negativi quelli minori di zero (cioè a sinistra).



Preso un numero con segno, es - 3 oppure + 5 (se un numero non ha il segno davanti, si sottintende che sia positivo)

Si chiama **valore assoluto** la cifra senza il segno.

Dalla figura potete notare che vale la **regola**:

- Un numero positivo è sempre maggiore di un numero negativo
- Tra due numeri positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore es.  $5 > 3$
- Tra due numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore es.  $-3 > -5$

Numeri con lo stesso segno si dicono **concordi** es. +5 e +3 oppure -2 e -1/2

Numeri con segno diverso si dicono **discordi** es. +5 e -3 oppure -2 e +1/2

# L'insieme Z e l'insieme Q

Se si amplia l'insieme dei numeri naturali, si ottengono i due insiemi:

**$Z^+$**  dei numeri **interi positivi**

**$Z^-$**  dei numeri **interi negativi**

L'unione di  $Z^+$  e  $Z^-$  e dell'insieme che contiene lo zero si indica con Z:

**$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$  e si chiama insieme dei numeri interi relativi**

Allo stesso modo, otteniamo anche da Q due nuovi insiemi,  **$Q^+$**  e  **$Q^-$**

**$Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$  prende il nome di insieme dei numeri razionali relativi.**

Notate che Z è un sottoinsieme di Q, esattamente come N era sottoinsieme di Q

# L'addizione e le sue proprietà

La somma di due numeri relativi prende il nome di **somma algebrica** e comprende sia la tradizionale somma sia la sottrazione.

**Infatti la sottrazione può essere pensata come la somma di un numero negativo ad un numero positivo:**

Es.  $5 - 3 = +5 + (-3)$  ovvero al numero 5 sommo il numero -3

Dunque si dice **somma di due numeri relativi concordi** il numero relativo che ha lo stesso segno degli addendi e come valore assoluto la somma dei due valori assoluti.

Es.  $3 + 5 = 8$

Si dice **somma di due numeri relativi discordi** il numero relativo che ha lo stesso segno dell'addendo di valore assoluto maggiore e per valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e il valore assoluto minore.

Es.  $5 - 3 = +2$

$-7 + 4 = -3$

**Proprietà dell'addizione:**

- la somma algebrica è chiaramente un'operazione interna sia a  $\mathbb{Z}$  sia a  $\mathbb{Q}$  perché il risultato ricade sempre in questi insiemi
- è commutativa
- è associativa
- esiste l'elemento neutro, che è lo zero
- esiste l'opposto: ogni numero relativo ha un simmetrico rispetto all'addizione, che si dice opposto (lo zero è l'opposto di se stesso)

Es.  $+5 + (-5) = 0$     $+(3/2) + (-3/2) = 0$

# Le somme nelle espressioni algebriche

Dalle proprietà dell'addizione derivano **alcune regole** che possono risultare molto utili quando facciamo calcoli algebrici:

- se in una addizione compaiono numeri opposti, si possono eliminare direttamente
- se in un'addizione compaiono addendi discordi, si possono raggruppare tutti quelli positivi e tutti quelli negativi (proprietà commutativa), farne le somme parziali (proprietà associativa) e poi farne le somme.

$$\text{Es. } 6 + 2 - 5 + 3 - 12 - 2 = (6 + 3) + (-12 - 5) = 9 - 17 = -8$$

Le operazioni in cui compaiono più numeri con diversi segni si dicono **espressioni algebriche**. Nelle espressioni possono comparire anche le parentesi, per modificare la precedenza delle operazioni (ricordate che, senza le parentesi, l'elevamento a potenza ha la precedenza su tutte le operazioni, poi si eseguono moltiplicazioni e divisioni e poi somme e sottrazioni nell'ordine in cui si incontrano).

**Quando abbiamo le parentesi** svolgiamo prima i calcoli tra le parentesi, ricordando che dobbiamo svolgere per primi i calcoli tra parentesi tonde ( ), poi quelli tra parentesi quadre [ ] e infine quelli tra parentesi graffe { }.

Inoltre, se davanti alla parentesi c'è un segno, + o -, ci si comporta così:

- se davanti alla parentesi il segno è +, i segni dei numeri tra parentesi non cambiano
- se davanti alla parentesi il segno è -, dobbiamo cambiare tutti i segni delle cifre tra parentesi (eventualmente dopo aver svolto i calcoli)

$$\text{Esempi: } -(8 + 3) + 2 = -(+11) + 2 = -11 + 2 = -9$$

# La moltiplicazione e le sue proprietà

Il **prodotto** di due numeri relativi è il numero relativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e per segno:

- il segno + se i due numeri sono concordi
- il segno - se i due sono discordi

Possiamo considerare la regola dei segni attraverso la tabella:

·	+	-
+	+	-
-	-	+

Due numeri relativi si dicono **reciproci** o **inversi** se il loro prodotto è uguale a +1

Esempi: il reciproco di + 3 è + 1/3

il reciproco di -3/4 è - 4/3

il reciproco di -1 è - 1

**Proprietà della moltiplicazione:**

- è un'operazione interna in Z e in Q
- è commutativa e associativa
- è distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione (cioè rispetto alla somma algebrica)
- esiste l'elemento neutro (che è il numero +1)
- ogni numero relativo, escluso lo zero, ha un reciproco, cioè un simmetrico rispetto alla moltiplicazione.

# L'elevamento a potenza

Nel caso di una potenza  $a^n$  con esponente intero positivo:

Se  $a > 0$  la potenza è positiva es.  $2^2 = 4$        $(1/2)^3 = 1/8$

Se  $a < 0$  la potenza è positiva se  $n$  è pari, negativa se  $n$  è dispari

Es.  $-3^2 = +9$        $-(3/4)^3 = -9/64$

Nel caso di una potenza  $a^{-n}$  con esponente intero negativo è uguale all'inverso della potenza di base  $a$  ed esponente positivo  $n$ :

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Esempi

$$(+2)^{-3} = \frac{1}{(+2)^3} = \frac{1}{8}$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

# Proprietà delle potenze

La potenza con esponente 0 da' sempre 1.

La potenza con esponente 1 lascia il numero invariato.

## Proprietà delle potenze:

- prodotto di due potenze con la stessa base:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

esempi:  $(+2)^2 \cdot (+2)^3 = (+2)^{2+3} = (+2)^5$

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$$

$$(-2)^{-3} \cdot (-2)^2 = (-2)^{-3+2} = (-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$$

- divisione tra due potenze con la stessa base:  $a^m : a^n = a^{m-n}$

esempi:  $(+2)^5 : (+2)^2 = (+2)^{5-2} = (+2)^3$

$$(+2)^2 : (+2)^{-3} = (+2)^{2-(-3)} = (+2)^{2+3} = (+2)^5$$

$$(-3)^2 : (-3)^5 = (-3)^{2-5} = (-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

- potenza di una potenza:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

esempi:

$$\left[(-3)^2\right]^3 = (-3)^{2 \cdot 3} = (-3)^6$$

$$\left[(+2)^2\right]^3 = (+2)^{2 \cdot (-3)} = (+2)^{-6}$$

- prodotto di due potenze con lo stesso esponente:  $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

esempi:

$$(+3)^3 \cdot (-2)^3 = \left[(+3) \cdot (-2)\right]^3 = (-6)^3$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)\right]^2 = \left(+\frac{3}{10}\right)^2$$

- divisione di due potenze con lo stesso esponente:  $a^n : b^n = (a:b)^n$

esempi:

$$(+3)^3 : (+5)^3 = \left[(+3) : (+5)\right]^3 = \left(+\frac{3}{5}\right)^3$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(+\frac{3}{5}\right)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{3}{5}\right)\right]^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right)\right]^2 = \left(-\frac{3}{10}\right)^2$$