

## Circonferenza e cerchio

La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un unico punto detto **centro**.

Il **cerchio** è l'insieme costituito dai punti appartenenti alla circonferenza e interni a questa.

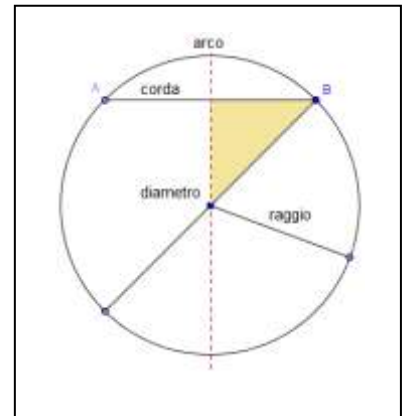
La distanza di uno dei punti appartenenti alla circonferenza dal centro è detta **raggio**.

Due circonferenze con raggi congruenti sono congruenti.

Il segmento avente come estremi due punti qualsiasi della circonferenza è detto **corda**.

In ogni circonferenza il **diametro** è la corda massima ed è pari al doppio della misura del raggio ( $d = 2r$ ).

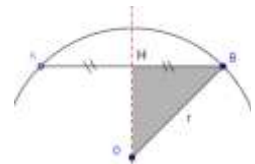
Due corde sono congruenti se e solo se hanno la stessa distanza dal centro.



Una retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare a una corda (asse della corda) la divide in due parti congruenti.

Una retta passante per il centro della circonferenza che divide in due parti congruenti una corda è perpendicolare a questa.

La distanza di una corda dal centro di una circonferenza è un segmento perpendicolare alla corda e la divide in due parti congruenti formando, con i due raggi che uniscono il centro agli estremi della corda e tale distanza, due triangoli rettangoli.



$$HO^2 = \left(\frac{\text{corda}}{2}\right)^2 + \text{raggio}^2$$

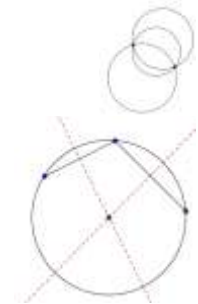
Per due punti passano infinite circonferenze.

Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.

*Dati tre punti ABC, si disegnino i segmenti AB e BC; si disegni l'asse di ognuno di questi segmenti con riga e compasso; il punto d'intersezione degli assi così costruiti è il centro della circonferenza che passa per A, B e C.*

*Si noti come l'asse di una corda passi per il centro della circonferenza.*

Per tre punti allineati, essendo gli assi dei segmenti tra loro paralleli, non passa alcuna circonferenza.



Una parte delle due parti della circonferenza individuata da due punti a essa appartenenti è detta **arco** di circonferenza.

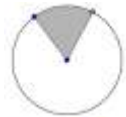
Due punti appartenenti a una circonferenza individuano su di questa due archi.

Due punti diametralmente opposti individuano due archi congruenti, detti **semicirconferenza**.

Dati due punti appartenenti a una circonferenza si dice che la corda così individuata **sottende** l'arco e che l'arco è **sotteso** alla corda.

In una circonferenza corde congruenti sottendono archi congruenti.

Un **settore** circolare è la parte di cerchio delimitata da due raggi e l'ampiezza del settore è data dall'angolo al centro compreso tra i due raggi.



Un **segmento** circolare **a una base** è la parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco che la sottende.



Un **segmento** circolare **a due basi** è la parte di cerchio delimitata da due corde tra loro parallele.



## Posizione di una retta rispetto a una circonferenza

Una retta è **esterna** a una circonferenza se la distanza ( $d$ ) di questa dal centro della circonferenza è maggiore del raggio ( $r$ ).

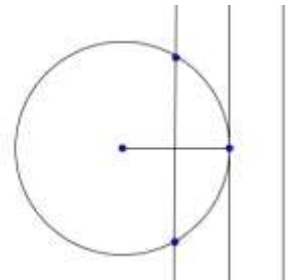
$$d > r$$

Una retta è **secante** a una circonferenza se la distanza di questa dal centro della circonferenza è minore del raggio.

$$d < r$$

Una retta è **tangente** a una circonferenza se la distanza di questa dal centro della circonferenza è uguale al raggio.

$$d = r$$



## Posizioni reciproche di due circonferenze

Una circonferenza è **esterna** a un'altra circonferenza se non hanno alcun punto in comune.

$$OO' = d > r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **interna** a un'altra circonferenza se non hanno alcun punto in comune e tutti i punti di uno dei cerchi appartiene anche all'altro.

$$OO' = d < r_2 - r_1$$

Una circonferenza è **secante** a un'altra circonferenza se hanno due punti in comune.

$$OO' = d < r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **tangente esternamente** a un'altra circonferenza se ha uno e uno solo punto in comune e se questo è vero anche per i due cerchi.

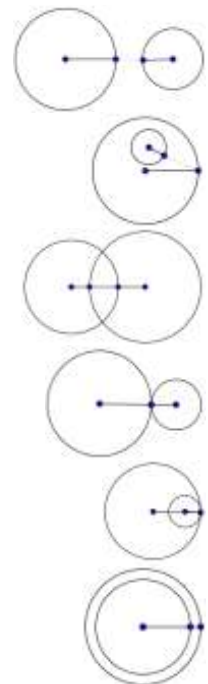
$$OO' = d = r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **tangente internamente** a un'altra circonferenza se ha uno e uno solo punto in comune e se tutti i punti di uno dei cerchi appartiene anche all'altro.

$$OO' = d = r_1 - r_2$$

Due circonferenze, un interna all'altra, si dicono **concentriche** se hanno lo stesso centro.

$$O = O'$$



## Angoli al centro e angoli alla circonferenza

Un **angolo al centro** ha il vertice nel centro della circonferenza e i lati che la intersecano.

A ogni angolo al centro corrisponde uno e un solo arco.

Un angolo al centro piatto insiste su una semicirconferenza.

Un angolo al centro retto insiste su un quarto di circonferenza.



Un **angolo alla circonferenza** ha il vertice sulla circonferenza e i lati che la intersecano.

A ogni angolo alla circonferenza corrisponde uno e un solo arco.

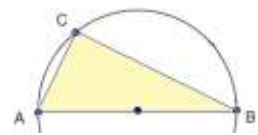
Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono detti **corrispondenti**.

Un angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.

Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti.

Ogni angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza è un angolo retto.

Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo (teorema di Dante)<sup>1</sup>.



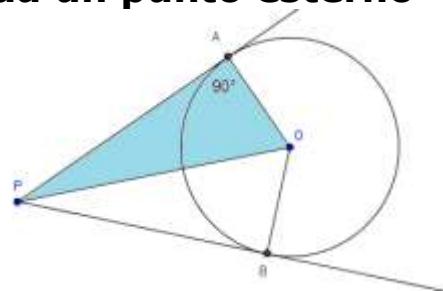
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

## Tangenti alla circonferenza condotte da un punto esterno

Per un punto esterno si possono condurre due tangenti a una circonferenza, inoltre i due segmenti di tangente sono tra di loro congruenti.

Essendo i segmenti di tangente AP e BP perpendicolari ai raggi OA e OB,  $PA=PB$  e si evidenziano due triangoli rettangoli congruenti (OPA e OPB).

$$PO^2 = AP^2 + OA^2$$



## Lunghezza della circonferenza

In una qualsiasi circonferenza è costante il rapporto tra la misura della circonferenza e la misura del diametro. Tale rapporto è pari al **numero irrazionale pi greco** ( $\pi^2$ ). Pi greco in pratica si considera a livello scolastico pari a 3,14.

La lunghezza della circonferenza è data dal prodotto del diametro per il numero  $\pi$ .

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi \quad \rightarrow \quad \mathbf{C = 2\pi r} \quad C = d\pi \quad r = \frac{C}{2\pi}$$

## Area del cerchio

L'area del cerchio è data dal prodotto di  $\pi$  per il quadrato della misura del raggio.

$$\mathbf{S = \pi r^2} \quad r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

<sup>1</sup> Dante Alighieri - Divina Commedia - Canto 13 del Paradiso (vv. 101-102),  
101 o se del mezzo cerchio far si puote

102 triangol si ch'un retto non avesse.

<sup>2</sup> Pi greco day: il 14 marzo (3-14) di ogni anno.

## Lunghezza di un arco di circonferenza

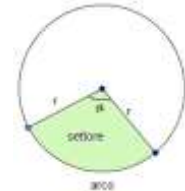
La lunghezza degli archi alla circonferenza e l'ampiezza degli angoli al centro corrispondenti sono legati da una relazione di proporzionalità diretta.

$$l:C = \alpha:360 \quad l:2\pi r = \alpha:360 \quad l = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360} \quad \alpha = \frac{l \cdot 360}{2\pi r} \quad \alpha = \frac{l \cdot 360}{2\pi r}$$

Dove  $l$  è la lunghezza dell'arco,  $C$  la lunghezza della circonferenza e  $\alpha$  è l'angolo al centro.

## Settore circolare

La parte di piano compresa tra due raggi e l'arco alla circonferenza corrispondente all'angolo al centro è detta **settore** circolare.



## Area di un settore circolare

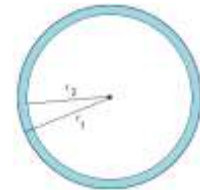
L'area di un settore circolare e l'ampiezza degli angoli al centro corrispondenti sono legati da una relazione di proporzionalità diretta.

$$S_{\text{settore}} : S_{\text{cerchio}} = \alpha : 360 \quad S_{\text{settore}} : \pi r^2 = \alpha : 360 \quad S_{\text{settore}} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \quad \alpha = \frac{S_{\text{settore}} \cdot 360}{\pi r^2}$$

Dove  $S_{\text{settore}}$  è l'area del settore circolare,  $S_{\text{cerchio}}$  l'area del cerchio e  $\alpha$  è l'angolo al centro.

## Corona circolare

La parte di piano compresa tra due circonferenze concentriche è detta **corona** circolare.



## Area di una corona circolare

L'area di una corona circolare è data dalla differenza tra l'area del cerchio maggiore e quella del cerchio minore.

$$S_c = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{S_c}{\pi}}$$

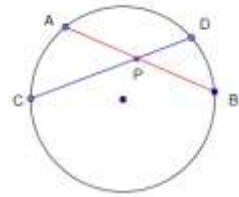
$$r_1 = \sqrt{r_2^2 + \frac{S_c}{\pi}}$$

## Teoremi utili

Due corde che si intersecano in un punto formano quattro segmenti che sono i termini di una proporzione: i segmenti dell'una sono i medi, gli altri gli estremi di una proporzione.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

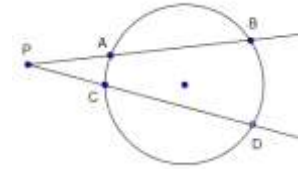
$$PA:PD = PC:PB$$



Se da un punto P, interno o esterno alla circonferenza, si tracciano due secanti si ottengono quattro segmenti che sono i termini di una proporzione: i segmenti dell'una sono i medi, gli altri gli estremi di una proporzione.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$PA:PC = PD:PB$$



Se da un punto P, esterno alla circonferenza, si tracciano una secante e una tangente si ottengono tre segmenti tali che il segmento di tangente è medio proporzionale tra gli altri due individuati dalla secante

$$PC \cdot PC = PA \cdot PB$$

$$PA:PC = PC:PB$$



## Teorema dei seni

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono su uno degli archi sottesi alla corda.

$$AB = 2r \sin \alpha$$

Dove  $\alpha$  è uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza inscritti nell'arco maggiore AB.

