

Circonferenza e cerchio

La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un unico punto detto **centro**.

Il **cerchio** è l'insieme costituito dai punti appartenenti alla circonferenza e interni a questa.

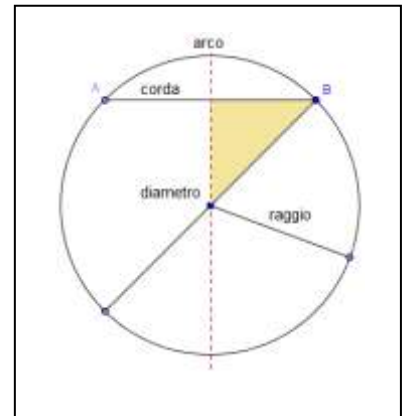
La distanza di uno dei punti appartenenti alla circonferenza dal centro è detta **raggio**.

Due circonferenze con raggi congruenti sono congruenti.

Il segmento avente come estremi due punti qualsiasi della circonferenza è detto **corda**.

In ogni circonferenza il **diametro** è la corda massima ed è pari al doppio della misura del raggio ($d = 2r$).

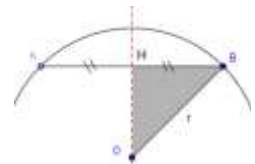
Due corde sono congruenti se e solo se hanno la stessa distanza dal centro.



Una retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare a una corda (asse della corda) la divide in due parti congruenti.

Una retta passante per il centro della circonferenza che divide in due parti congruenti una corda è perpendicolare a questa.

La distanza di una corda dal centro di una circonferenza è un segmento perpendicolare alla corda e la divide in due parti congruenti formando, con i due raggi che uniscono il centro agli estremi della corda e tale distanza, due triangoli rettangoli.



$$HO^2 = \left(\frac{\text{corda}}{2}\right)^2 + \text{raggio}^2$$

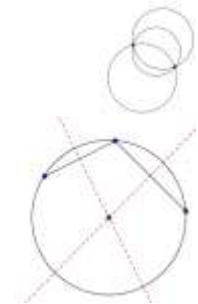
Per due punti passano infinite circonferenze.

Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.

Dati tre punti ABC, si disegnino i segmenti AB e BC; si disegni l'asse di ognuno di questi segmenti con riga e compasso; il punto d'intersezione degli assi così costruiti è il centro della circonferenza che passa per A, B e C.

Si noti come l'asse di una corda passi per il centro della circonferenza.

Per tre punti allineati, essendo gli assi dei segmenti tra loro paralleli, non passa alcuna circonferenza.



Una parte delle due parti della circonferenza individuata da due punti a essa appartenenti è detta **arco** di circonferenza.

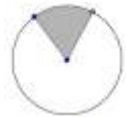
Due punti appartenenti a una circonferenza individuano su di questa due archi.

Due punti diametralmente opposti individuano due archi congruenti, detti **semicirconferenza**.

Dati due punti appartenenti a una circonferenza si dice che la corda così individuata **sottende** l'arco e che l'arco è **sotteso** alla corda.

In una circonferenza corde congruenti sottendono archi congruenti.

Un **settore** circolare è la parte di cerchio delimitata da due raggi e l'ampiezza del settore è data dall'angolo al centro compreso tra i due raggi.



Un **segmento** circolare **a una base** è la parte di cerchio delimitata da una corda e dall'arco che la sottende.



Un **segmento** circolare **a due basi** è la parte di cerchio delimitata da due corde tra loro parallele.



Posizione di una retta rispetto a una circonferenza

Una retta è **esterna** a una circonferenza se la distanza (d) di questa dal centro della circonferenza è maggiore del raggio (r).

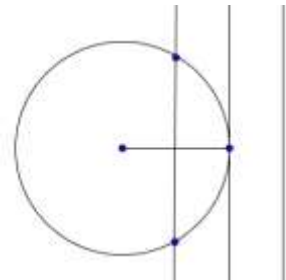
$$d > r$$

Una retta è **secante** a una circonferenza se la distanza di questa dal centro della circonferenza è minore del raggio.

$$d < r$$

Una retta è **tangente** a una circonferenza se la distanza di questa dal centro della circonferenza è uguale al raggio.

$$d = r$$



Posizioni reciproche di due circonferenze

Una circonferenza è **esterna** a un'altra circonferenza se non hanno alcun punto in comune.

$$OO' = d > r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **interna** a un'altra circonferenza se non hanno alcun punto in comune e tutti i punti di uno dei cerchi appartiene anche all'altro.

$$OO' = d < r_2 - r_1$$

Una circonferenza è **secante** a un'altra circonferenza se hanno due punti in comune.

$$OO' = d < r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **tangente esternamente** a un'altra circonferenza se ha uno e uno solo punto in comune e se questo è vero anche per i due cerchi.

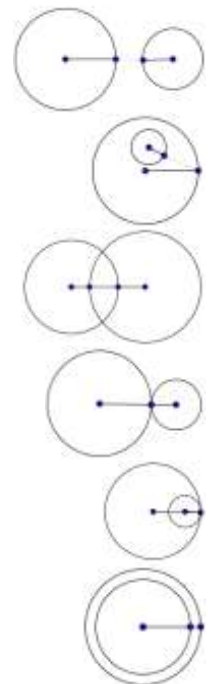
$$OO' = d = r_1 + r_2$$

Una circonferenza è **tangente internamente** a un'altra circonferenza se ha uno e uno solo punto in comune e se tutti i punti di uno dei cerchi appartiene anche all'altro.

$$OO' = d = r_1 - r_2$$

Due circonferenze, un interna all'altra, si dicono **concentriche** se hanno lo stesso centro.

$$O = O'$$



Angoli al centro e angoli alla circonferenza

Un **angolo al centro** ha il vertice nel centro della circonferenza e i lati che la intersecano.

A ogni angolo al centro corrisponde uno e un solo arco.

Un angolo al centro piatto insiste su una semicirconferenza.

Un angolo al centro retto insiste su un quarto di circonferenza.



Un **angolo alla circonferenza** ha il vertice sulla circonferenza e i lati che la intersecano.

A ogni angolo alla circonferenza corrisponde uno e un solo arco.

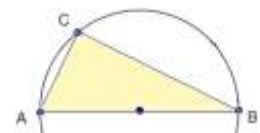
Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono detti **corrispondenti**.

Un angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.

Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti.

Ogni angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza è un angolo retto.

Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo (teorema di Dante)¹.



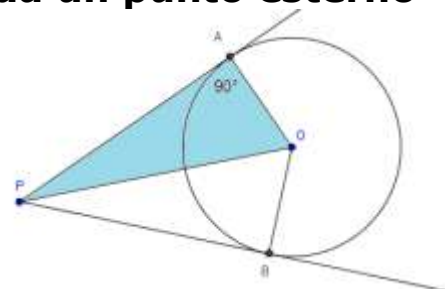
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Tangenti alla circonferenza condotte da un punto esterno

Per un punto esterno si possono condurre due tangenti a una circonferenza, inoltre i due segmenti di tangente sono tra di loro congruenti.

Essendo i segmenti di tangente AP e BP perpendicolari ai raggi OA e OB, PA=PB e si evidenziano due triangoli rettangoli congruenti (OPA e OPB).

$$PO^2 = AP^2 + OA^2$$



Lunghezza della circonferenza

In una qualsiasi circonferenza è costante il rapporto tra la misura della circonferenza e la misura del diametro. Tale rapporto è pari al **numero irrazionale pi greco** (π^2). Pi greco in pratica si considera a livello scolastico pari a 3,14.

La lunghezza della circonferenza è data dal prodotto del diametro per il numero π .

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi \quad \rightarrow \quad \mathbf{C = 2\pi r} \quad C = d\pi \quad r = \frac{C}{2\pi}$$

Area del cerchio

L'area del cerchio è data dal prodotto di π per il quadrato della misura del raggio.

$$\mathbf{S = \pi r^2} \quad r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

¹ Dante Alighieri - Divina Commedia - Canto 13 del Paradiso (vv. 101-102),
101 o se del mezzo cerchio far si puote

102 triangol si ch'un retto non avesse.

² Pi greco day: il 14 marzo (3-14) di ogni anno.

Lunghezza di un arco di circonferenza

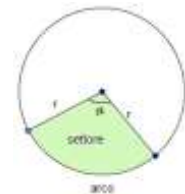
La lunghezza degli archi alla circonferenza e l'ampiezza degli angoli al centro corrispondenti sono legati da una relazione di proporzionalità diretta.

$$l:C = \alpha:360 \quad l:2\pi r = \alpha:360 \quad l = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360} \quad \alpha = \frac{l \cdot 360}{2\pi r} \quad \alpha = \frac{l \cdot 360}{2\pi r}$$

Dove l è la lunghezza dell'arco, C la lunghezza della circonferenza e α è l'angolo al centro.

Settore circolare

La parte di piano compresa tra due raggi e l'arco alla circonferenza corrispondente all'angolo al centro è detta **settore** circolare.



Area di un settore circolare

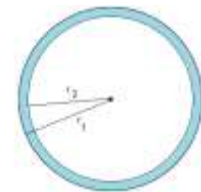
L'area di un settore circolare e l'ampiezza degli angoli al centro corrispondenti sono legati da una relazione di proporzionalità diretta.

$$S_{\text{settore}} : S_{\text{cerchio}} = \alpha : 360 \quad S_{\text{settore}} : \pi r^2 = \alpha : 360 \quad S_{\text{settore}} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \quad \alpha = \frac{S_{\text{settore}} \cdot 360}{\pi r^2}$$

Dove S_{settore} è l'area del settore circolare, S_{cerchio} l'area del cerchio e α è l'angolo al centro.

Corona circolare

La parte di piano compresa tra due circonferenze concentriche è detta **corona** circolare.



Area di una corona circolare

L'area di una corona circolare è data dalla differenza tra l'area del cerchio maggiore e quella del cerchio minore.

$$S_c = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{S_c}{\pi}}$$

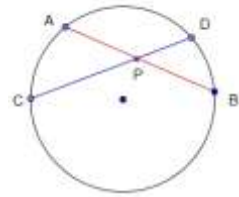
$$r_1 = \sqrt{r_2^2 + \frac{S_c}{\pi}}$$

Teoremi utili

Due corde che si intersecano in un punto formano quattro segmenti che sono i termini di una proporzione: i segmenti dell'una sono i medi, gli altri gli estremi di una proporzione.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

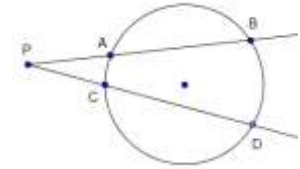
$$PA:PD = PC:PB$$



Se da un punto P, interno o esterno alla circonferenza, si tracciano due secanti si ottengono quattro segmenti che sono i termini di una proporzione: i segmenti dell'una sono i medi, gli altri gli estremi di una proporzione.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

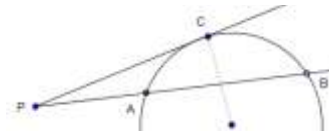
$$PA:PC = PD:PB$$



Se da un punto P, esterno alla circonferenza, si tracciano una secante e una tangente si ottengono tre segmenti tali che il segmento di tangente è medio proporzionale tra gli altri due individuati dalla secante

$$PC \cdot PC = PA \cdot PB$$

$$PA:PC = PC:PB$$



Teorema dei seni

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono su uno degli archi sottesi alla corda.

$$AB = 2r \sin \alpha$$

Dove α è uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza inscritti nell'arco maggiore AB.

