Calcolo letterale

L'uso delle lettere al posto dei numeri si utilizza per scrivere proprietà e regole dandone una valenza più generale rispetto ad un restrittivo esempio numerico (*a*+*b*=*b*+*a*). L'uso delle lettere è utilizzato in geometria per scrivere formule valide per la generalità delle figure (area=b·h). Le lettere rappresentano di volta in volta il caso particolare e il valore di un'espressione letterale dipende, quindi, dal valore assegnato alle sue lettere.
Il calcolo letterale ci impone però di far di conto con le lettere proprio come fossero numeri per ottenere forme compatte di espressioni letterali altrimenti complesse.

Espressioni letterali

Una **espressione letterale** o **algebrica** è un'espressione in cui alcuni numeri sono espressi mediante lettere.

Esempio: 9a-b

In una stessa espressione letterale, lettere uguali rappresentano numeri reali uguali.
Per calcolare il valore di una espressione letterale si sostituiscono i valori corrispondenti alle lettere e si calcola il valore dell'espressione numerica così ottenuta (per sostituzione).

$$9a-b= \qquad per\ \ a=+1\ \ e\ \ b=-3$$
$$=9\cdot(+1)-(-3)=$$
$$=9+3=12$$

$$-3b+(-7a)-(-2b)+(+5a)-(+8a)= \qquad per\ \ a=-1\ \ e\ \ b=+2$$
$$=-3b-7a+2b+5a-8a=$$
$$=-3\cdot(+2)-7\cdot(-1)+2\cdot(+2)+5\cdot(-1)-8\cdot(-1)=$$
$$=-6+7+4-5+8=8$$

Una espressione algebrica perde significato
- *quando il denominatore è 0 in quanto non ha senso dividere per 0*
- *per valori che rendono negativa un'espressione sotto radice con indice pari*

$$\frac{x+y}{x} \qquad per \qquad x=0;\, y\neq 0 \ \text{ è impossibile (*)}$$

$$\frac{5x+3yx}{x^2-25}-\frac{3x+y}{x^2-y} \qquad \text{per x = -25; -5}$$

per x=-25	$\frac{-125-75y}{625-25}-\frac{-75+y}{625-y}$	impossibile per y=625
per x=-5	$\frac{-25-15y}{25-25}-\frac{-15+y}{25-y}$	Impossibile

Ricorda:
0:1 = 0, **1:0 = impossibile** e **0:0 = indeterminata**; $\sqrt{4}=\pm 2$, mentre $\sqrt{-4}$ = impossibile

Monomi

Si dice **monomio** una espressione letterale con sole moltiplicazioni e divisioni.

$\boxed{-\frac{1}{3}a^3b^2c}$ $\qquad -\frac{1}{3}$ è detto **coefficiente** del monomio e a^3b^2c è detta **parte letterale**.

Un monomio di dice **intero** quando non compaiono lettere come divisori, **frazionario** in caso contrario.

$\frac{1}{2}a^3b$ è un monomio intero, mentre $\frac{a^3b}{c}$ è un monomio frazionario

Il grado complessivo o **grado** di un monomio è la somma degli esponenti delle sue lettere.

a^3b è un monomio di 4° grado (3+1=4)

$+3$ è un monomio di grado zero

Il **grado** di un monomio **rispetto ad una lettera** è l'esponente con cui la lettera figura nel monomio.

a^3b è un monomio di terzo grado rispetto alla *a* e di primo grado rispetto alla *b*

Un monomio di grado zero è ridotto al solo coefficiente.

$+2a^0 = 2 \cdot 1 = 2$

Due o più monomi sono **simili** tra loro se hanno la stessa parte letterale con gli stessi esponenti.

$12x^3y^2; \qquad -4x^3y^2; \qquad \frac{1}{4}x^3y^2; \qquad -\frac{5}{2}x^3y^2$ sono tutti simili tra di loro

Due o più monomi sono **opposti** tra loro se hanno la stessa parte letterale con gli stessi esponenti e come coefficiente numeri reali opposti.

$+12a^3b \qquad -12a^3b$

Due o più monomi sono **uguali** tra loro se hanno la stessa parte letterale con gli stessi esponenti e lo stesso coefficiente.

$+2a^2b \qquad +2a^2b$

Un monomio **nullo** ha come coefficiente il numero reale 0 e il suo valore è sempre 0.

Un monomio non nullo assume valore 0 quando una delle sue lettere assume valore 0.

$+2a^2b \qquad per \;\; a = 0$

Le operazioni con i monomi

Somma algebrica

La somma di due monomi è possibile se e solo se i monomi hanno identica la parte letterale (simili). La somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti e per parte letterale la stessa parte letterale.

$$7x^2y - 6x^2y = 1x^2y = x^2y$$

Si può applicare la proprietà distributiva, raccogliendo a fattore comune, a somme i cui addendi hanno lo stesso fattore

$$+2ab - 5ab + 4ab = (+2 - 5 + 4) \cdot ab = +1ab = ab$$

La somma algebrica di monomi non simili non è possibile e i monomi si lasciano indicati.

Prodotto di monomi

Calcolare il prodotto di due o più monomi è sempre possibile.
Il prodotto di due o più monomi è uguale a un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.
Alla parte letterale si applica la proprietà del prodotto di potenze con stessa base ($a^x \cdot a^y = a^{x+y}$).

$$\left(+2a^2b\right)\cdot\left(-3a^2bc^3\right) = -6a^4b^2c^3 = -6a^4b^2c^3$$

Quoziente di monomi

Calcolare il quoziente di due monomi è sempre possibile.
Il quoziente di due monomi è uguale a un monomio che ha per coefficiente il quoziente dei coefficienti e per parte letterale il quoziente delle parti letterali.
Alla parte letterale si applica la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base ($a^x : a^y = a^{x-y}$).

$$\left(+6a^5b^2c\right):\left(-3a^2bc\right) = \frac{+\cancel{6}^2}{-\cancel{3}_1}\,\frac{a\cdot a\cdot a\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot b\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{c}}{\cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{b}\cdot \cancel{c}} = -2a^{5-2}b^{2-1}c^{1-1} = -2a^3b$$

$$\left(+3a^5b^2c\right):\left(-4a^2bc\right) = \left(\frac{+3}{-4}\right)a^{5-2}b^{2-1}c^{1-1} = -\frac{3}{4}a^3b$$

Due monomi sono divisibili quando il monomio divisore contiene solo alcune delle lettere del monomio dividendo (al più tutte) ma con esponente minore o al più uguale. Negli altri casi si ottiene un monomio con esponenti negativi e quindi frazionario.

$$\left(-6a^2bc\right):\left(+3a^5b^2c\right) = -2a^{2-5}b^{1-2}c^{1-1} = -2a^{-3}b^{-1} = -\frac{2}{a^3b}$$

Elevamento a potenza di monomi

La potenza di un monomio è un monomio che ha per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.
Alla parte letterale si applica la proprietà della potenza di potenza ($\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$).

$$\left(-3a^3b^2c\right)^2 = +9a^{3\cdot 2}b^{2\cdot 2}c^{1\cdot 2} = +9a^6b^4c^2$$

Polinomi

Un **polinomio**, scritto in forma ridotta, è la somma algebrica di due o più monomi non simili tra di loro.
I monomi che lo formano si chiamano termini del polinomio.

Esempi: $a+b$; a^2+a

Se un polinomio non è scritto in forma ridotta si procede alla riduzione dei termini simili sommandoli.

$$2x+5xy-5x+3=(+2-5)x+5xy+3=-3x+5xy+3$$

Un monomio può essere visto come un polinomio particolare, somma di quel monomio e del monomio nullo.

Alcuni polinomi assumo i seguenti nomi particolari:
binomio la somma di due monomi, **trinomio** la somma di tre monomi e **quadrinomio** la somma di quattro monomi.

Un polinomio di dice **intero** quando tutti i sui termini sono monomi interi, **frazionario** in caso contrario.

Il **grado** di un polinomio è quello del suo monomio di grado massimo.

$5a^2b^3-7a^4b^3$ *è un binomio di settimo grado (3+4=7)*

Un polinomio è **ordinato** rispetto ad una lettera se le potenze di quella lettera sono ordinate, dal primo all'ultimo monomio, in ordine crescente o in ordine decrescente

$5a^4b-3a^2b^3+6ab^5$ *è ordinato secondo le potenze decrescenti della a e crescenti della b*

Un polinomio si dice **completo** e ordinato rispetto ad una lettera se questa figura nei vari termini con tutti gli esponenti da quello di grado minimo a quello di grado massimo in modo ordinato.

$5a^4b+2a^3b^4-3a^2b^3+6ab^5+7$ *è completo rispetto alla lettera a, incompleto rispetto a b*

Un polinomio è **omogeneo** se tutti i suoi termini sono dello stesso grado.

$5a^4b+2a^3b^2-3a^2b^3+b^5$ *è omogeneo di quinto grado*

Due polinomi sono **identici** quando le loro lettere, che possono essere anche diverse, compaiono con le stesse potenze e le stesse potenze hanno lo stesso coefficiente.

$5a^3b-2a^2$ $\qquad$ $5x^3y-2x^2$

Il valore di un polinomio è funzione del valore delle lettere che vi compaiono.

Le operazioni con i polinomi

Somma algebrica di polinomi

Per "**riduzione dei termini simili**" di un polinomio si intende la somma di tutti i monomi simili presenti.
La somma di due o più polinomi si esegue eliminando le parentesi che racchiudono i polinomi e sommando, poi, i polinomi simili presenti (riduzione).

L'eliminazione di una parentesi preceduta dal segno + non cambia il segno dei monomi in essa contenuti. L'eliminazione di una parentesi preceduta dal segno – porta a cambiare il segno di tutti i monomi in essa contenuti.

$$2x+(x-2y)-(2x-y)=\underline{2x}+\underline{x}-\underline{\underline{2y}}-\underline{2x}+\underline{\underline{y}}=(2+1-2)\cdot x+(-2+1)\cdot y=x-y$$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Si applica la proprietà distributiva moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio. Alla fine si sommano i prodotti ottenuti e si riducono i monomi eventualmente simili.

$$3x\cdot(x-2y)=3x^2-6xy$$

Moltiplicazione di polinomi

Si applica la proprietà distributiva moltiplicando ogni termine del primo per ciascun termine del secondo. Alla fine si sommano i prodotti ottenuti e si riducono i monomi eventualmente simili.

$$(3x+y)\cdot(x-2y)=3x^2-\underline{6xy}+\underline{xy}-2y^2=3x^2+(-6+1)\cdot xy-2y^2=3x^2-5xy-2y^2$$

Nella moltiplicazione di più polinomi si moltiplicano i primi due polinomi tra loro (scrivendo il risultato tra parentesi) e nel passaggio successivo si moltiplica tale risultato per il terzo polinomio, … e così via.

$$(3x+y)\cdot(x-2y)\cdot(3+y)=(3x^2-5xy-2y^2)\cdot(3+y)=9x^2-15xy-6y^2+3x^2y-5xy^2-2y^3$$

Divisione di un polinomio per un monomio

Si applica la proprietà distributiva dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio. Alla fine si addizionano i quozienti ottenuti e si riducono i monomi eventualmente simili.

$$(6x^3-12x^2):(-2x)=(6x^3):(-2x)+(-12x^2):(-2x)=-3x^2+6x$$

Divisione di due polinomi

La divisione tra due polinomi si può eseguire con un metodo che ricalca in parte quello della divisione tradizionale.
Nei casi in cui il divisore è un binomio di primo grado si può utilizzare la **Regola di Ruffini**.
Un polinomio è divisibile per un altro polinomio se il risultato è un terzo polinomio e la divisione non ha resto.

Espressioni letterali

Nelle espressioni con i monomi e i polinomi valgono tutte le regole applicate alle altre espressioni.

Espressione senza parentesi

- Si eseguono prima le potenze, i logaritmi e i radicali, uno dopo l'altro nell'ordine scritto. Presta molta attenzione alle proprietà eventualmente applicabili.
- Si eseguono poi le moltiplicazioni e le divisioni, una dopo l'altra nell'ordine in cui sono scritte.
- Si eseguono infine le addizioni e le sottrazioni, una dopo l'altra nell'ordine in cui sono scritte.

Espressione con parentesi $\{[(\ )]\}$

- Si eseguono prima le operazioni in parentesi rotonde, rispettando le regole considerate per le espressioni senza parentesi.
- Si eseguono poi le operazioni in parentesi quadre, rispettando le regole considerate per le espressioni senza parentesi.
- Si eseguono infine le operazioni in parentesi graffe, rispettando le regole considerate per le espressioni senza parentesi.

Una volta eseguite tutte le operazioni all'interno di una parentesi questa si deve eliminare conservando il segno dei monomi se davanti ad essa c'è il segno + e cambiandoli se davanti ad essi c'è il segno –.

Espressione con parentesi solo rotonde

In realtà nel computo con calcolatrici scientifiche o con i computer si usano solo parentesi rotonde. Occorre in questo caso avere l'accortezza di risolvere prima le parentesi più interne e poi le altre fino a quelle più esterne.

Una volta eseguite tutte le operazioni all'interno di una parentesi questa si deve eliminare conservando il segno dei monomi se davanti ad essa c'è il segno + e cambiandoli se davanti ad essi c'è il segno –.

L'ordine da seguire è giustificato dal significato matematico delle parentesi. Le parentesi indicano infatti che al posto dei numeri, collegati da segni di operazione, si può sostituire il loro risultato.

Sitografia

TooMates
http://www.toomates.net
Matemàtiques per a la diversitat – di Gerad Tomo