CALCOLO LETTERALE

Prof. Katia Comandi

Dispensa per la classe III° ITI Informatico

a.s 2006/2007

Indice

Il Calcolo letterale

Il Calcolo letterale

1 Introduzione

Questa trattazione si pone complessivamente l'obiettivo di fornire tutto il materiale concettuale ed esercitativo relativo al calcolo letterale, cioè a quella parte dell'algebra elementare che va dal calcolo con monomi e polinomi fino al calcolo con le frazioni algebriche.

Poiché le proprietà algebriche di monomi, polinomi e frazioni algebriche, sono una conseguenza delle proprietà algebriche degli insiemi numerici (e in particolare di **Z** fino al calcolo con i polinomi e di **Q** per il calcolo con le frazioni algebriche), è opportuno, ma non essenziale, che questo argomento venga trattato dopo lo studio degli Insiemi numerici fondamentali, nel quale si analizzano le proprietà di **N**, **Z**, **Q**, **R**, si revisiona e si approfondisce l'operazione di elevazione a potenza e si analizza, in modo generale, il significato di operazione in un insieme.

In ogni caso, molte delle difficoltà che insorgono nell'apprendimento del calcolo letterale dipendono dalla cattiva comprensione di concetti o regole che si sarebbero dovuti imparare in modo solido prima della sua introduzione. In particolare, molte analisi degli errori ricorrenti concordano sulla persistenza dei seguenti:

- *non rispetto dell'ordine di precedenza delle operazioni, dovuto ad una omologazione del calcolo alle regole di lettura (da sinistra verso destra) del linguaggio non matematico. Errore tipico, già aritmetico e che si ripercuote nel calcolo algebrico, è per esempio "1+2·3=3·3=9";*
- *non rispetto del ruolo delle parentesi e della loro necessità nel caso si debba modificare l'ordine naturale di esecuzione delle operazioni. Errori tipici, a tale proposito, sono l'indifferenza tra scritture quali* $(a+b)(c+d)$ *e* $(a+b)c+d$ *oppure la "dimenticanza" della distribuzione del segno che fa credere uguali le seguenti scritture* $a-(b+c)$ *e* $a-b+c$*;*
- *non consolidata differenziazione delle regole che governano le operazioni tra esponenti quando si opera con potenze. Non si applicano così agli esponenti le operazioni "di livello più basso" e si trovano errori tipici quali* $a^2 \cdot a^3 = a^6$ *;*
- *non comprensione della sintassi del calcolo con le frazioni e, in particolare, incertezza sul significato di scritture quali* $a\frac{b}{c}$ *(in cui sono presenti tre livelli!) o* $\frac{a+b}{a+c}$*, nella quale volentieri vengono "semplificate" le* a *del numeratore e del denominatore, non rilevando il ruolo di parentesi che ha il segno di frazione "lungo";*
- *tendenza alla "semplificazione" a tutti i costi, probabilmente naturale, ma sicuramente rafforzata dall'educazione scolastica, così infarcita di espressioni lunghe e complicate che "magicamente" si riducono a pochi e familiari numeri od espressioni. A ciò sono anche dovuti errori tipici quali* $\frac{a+b}{a+c}=\frac{b}{c}$*, che si richiamava nel punto precedente, oppure* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$*;*
- *confusione tra il "mondo dell'addizione" e il "mondo della moltiplicazione", le due fondamentali strutture operative che si "incrociano" attraverso la proprietà distributiva, e loro ulteriore confusione con la para-matematica della vita quotidiana. Così, è assai frequente la omologazione di "niente" (come risultato mentale para-matematico), "zero" (il "niente" dell'addizione") e "uno" (il "niente" della moltiplicazione); errori tipici di questo genere sono* $a-a=1$ *o, più frequente,* $\frac{a}{a}=0$.

Oltre a ciò, va tenuto conto che nell'apprendimento del calcolo letterale si va incontro a due rischi opposti:

a) *si "dimentica" l'origine numerica del calcolo letterale e le espressioni, anziché essere strumenti di* *generalizzazione, diventano brutali esercizi fini a se stessi, su cui non esercitare ragionamento, ma solo, quando va bene, esecutive capacità di calcolo (per questo, spesso, piacciono così tanto agli studenti di livello medio, perché, una volta capite le non molte regole, non impegnano il ragionamento, così come invece problemi di varia natura);*

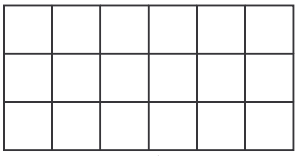
b) non si "raggiunge" il livello nel quale gli oggetti del calcolo letterale − i monomi, i polinomi, le frazioni algebriche − pur essendo nati da esigenze di generalizzazione del livello numerico, se ne distaccano, quasi autonomizzandosi. Anche se, a livello di biennio, il percorso non va seguito fino a tal punto, i polinomi costituiscono comunque un anello e, dunque, un'autonoma struttura, oramai svincolata − quando se ne studiano le caratteristiche − dalla loro origine di strumenti per generalizzare o per risolvere problemi effettivi.

Nella presentazione del materiali di studio, nella scelta degli esempi e degli esercizi, ho tenuto conto di tali diagnosi e, pertanto, è continuamente riproposto questo doppio livello della comprensione del calcolo letterale (come strumento di generalizzazione e come ambiente di calcolo autonomo), così come le situazioni "imbarazzanti" dove si annidano gli errori tipici sono ben più frequenti di altre situazioni più di routine.

2 Scopo del Calcolo letterale

Supponiamo di dover calcolare la superficie occupata da un terreno di forma rettangolare che ha 6m di larghezza e 3m di lunghezza.

Si tratta di un problema piuttosto semplice, perché la superficie di un rettangolo si calcola moltiplicando le misure dei due lati, infatti avremo:

3 

6

$$A = 3 \cdot 6 = 18m^2$$

A questo punto sorge spontanea la domanda: *"Ci sarà un sistema per calcolare l'area di un rettangolo qualsiasi?*

Si il modo c'è: indicate con b e h le misure, rispetto alla stessa unità, della base e dell'altezza del rettangolo, l'area, cioè la misura della superficie, è data dalla seguente formula

$$A = b \cdot h$$

Questa formula è di carattere generale e si può quindi applicare per determinare l'area di un qualsiasi rettangolo di cui si conoscano la base e l'altezza.

Osservazione: quando si indica un prodotto tra due numeri rappresentati da lettere si suole omettere il "punto", cioè il segno dell'operazione di moltiplicazione. Ad esempio

$$a \cdot b = ab \qquad 2 \cdot n = 2n \qquad a \cdot b \cdot c = abc$$

E' invece evidente che per indicare il prodotto tra due numeri, per esempio tra il numero 2 ed il numero 3, non si può omettere il segno di moltiplicazione, altrimenti si leggerebbe 23 "ventitre".

Cosa succede se volessi calcolare il perimetro di un rettangolo?

Nel caso specifico dell'esempio considerato, il bordo del terreno misurerà $3+3+6+6=18m$, ma per un rettangolo qualsiasi avremo la seguente formula:

$$p = b+b+h+h = 2 \cdot b + 2 \cdot h$$

che viene così scritta

$$p = 2b + 2h\,.$$

Dall'esempio proposto si è visto che, usando lettere dell'alfabeto per indicare numeri (reali), si ottiene il vantaggio di poter generalizzare un determinato problema e di poter agevolmente indicare la sequenza di operazioni da eseguire per risolverlo.

Si dice così che il **Calcolo letterale** è quella parte della matematica che generalizza il calcolo algebrico usando anche delle lettere per indicare numeri. Vedi a questo proposito gli Approfondimenti (par. 9.1, 9.2 e 9.3).

Per esempio, con la scrittura

$$\frac{a^2-3b}{2a}$$

intendiamo il problema che, nel linguaggio comune, si enuncia così: *dividere la differenza tra il quadrato di un numero dato e il triplo di un altro numero dato per il doppio del primo numero considerato*. Che fatica!

Il valore che si otterrà eseguendo tali operazioni dipenderà, evidentemente, dai valori che si attribuiranno alle due lettere a e b:

$a=1$, $b=2$

$$\frac{(1)^2-3(2)}{2(1)}=\frac{1-6}{2}=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$$

oppure

$a=-1$, $b=-2$

$$\frac{(-1)^2-3(-2)}{2(-1)}=\frac{1+6}{-2}=\frac{7}{-2}=-\frac{7}{2}$$

Chiameremo **espressione algebrica letterale** o semplicemente **espressione letterale** ogni scrittura che indichi operazioni da eseguire su numeri e lettere assegnati.

Le lettere che compaiono in una espressione letterale si dicono **indeterminate** e rappresentano numeri reali.

Possiamo concludere che mentre una espressione algebrica numerica indica quali operazioni compiere su certi numeri per giungere a un risultato numerico (valore dell'espressione), le espressioni letterali costituiscono uno schema generale di calcolo:

espressione algebrica numerica	**espressione algebrica letterale**
$\frac{(1)^2-3(2)}{2(1)}$	$\frac{a^2-3b}{2a}$

3 Monomi

La più semplice espressione letterale intera è il cosiddetto **monomio**. Il monomio è una espressione letterale in cui figurano solo operazioni di moltiplicazione.

Ovviamente, per come è definito, un monomio rappresenta un numero.

Il **grado di un monomio** è la somma degli esponenti delle sue lettere.

Due o più **monomi** si dicono **simili** quando hanno la stessa parte letterale.

Vediamo da vicino come è fatto un monomio:

$$-\frac{4}{5}x^3y^2z$$

Parte numerica $-\frac{4}{5}$

Grado del monomio $3+2+1=6$

Parte letterale x^3y^2z

Per concludere possiamo dire che:

- le lettere, in generale, rappresentano qualunque numero reale (e dunque possono rappresentare anche numeri negativi);

- tra le lettere è omesso il segno di moltiplicazione;
- lettere uguali rappresentano necessariamente numeri uguali, mentre lettere diverse non rappresentano necessariamente numeri diversi;
- i numeri reali sono a loro volta monomi di grado zero e lo 0 è a sua volta un monomio;
- applicando tutte le regole valide per le espressioni numeriche (proprietà delle operazioni tra numeri comprese le potenze, priorità delle operazioni e uso delle parentesi) è possibile calcolare espressioni letterali contenenti monomi.

Vediamo alcuni esempi di esercizi svolti:

Somma di monomi simili

$$ab^2c+\left(-\frac{1}{2}ab^2c\right)+3ab^2c=\left(1-\frac{1}{2}+3\right)ab^2c=\frac{7}{2}ab^2c$$

Prodotto di monomi

$$\left(-4ab^2c\right)\left(\frac{3}{4}a^3b\right)\left(-5bc^2\right)=\left(-4\right)\left(+\frac{3}{4}\right)\left(-5\right)a^4b^4c^3=+15a^4b^4c^3$$

Potenza di un monomio

$$\left(-2a^2bc^3\right)^3=\left(-2\right)^3a^6b^3c^9=-8a^6b^3c^9$$

Quoziente di due monomi

$$\left(-18a^5b^3c^4\right):\left(+3a^3b^2c\right)=-6a^2bc^3$$

4 Polinomi

Si chiama **polinomio** una espressione letterale formata dalla somma algebrica di più monomi detti termini del polinomio.

I monomi, quindi, sono casi particolari di polinomi formati da un solo termine.

In particolare viene detto:

Binomio il polinomio formato da due monomi non simili

Trinomio il polinomio formato da tre monomi non simili due a due

Quadrinomio il polinomio formato da 4 monomi a due a due non simili.

Se un polinomio è formato da monomi che non sono simili a due a due, si dice che è ridotto a forma normale.

Il **grado di un polinomio** è il massimo dei gradi dei termini (monomi) che lo compongono.

Alcune raccomandazioni:

- tra le parentesi si omette spesso il punto della moltiplicazione;
- lo zero può essere considerato come un particolare polinomio;
- come per i monomi, applicando tutte le regole valide per le espressioni numeriche, è possibile calcolare espressioni letterali contenenti polinomi.

Vediamo alcuni esempi di esercizi svolti:

Somma algebrica di due o più polinomi

$$\left(x^2-\frac{1}{3}x+2y\right)+\left(4x^2+6x\right)-\left(-2-3y+5x^2\right)=x^2-\frac{1}{3}x+2y+4x^2+6x+2+3y-5x^2=$$

$$(1+4-5)x^2+\left(6-\frac{1}{3}\right)x+(2+3)y+2=\frac{17}{3}x+5y+2$$

Prodotto tra un monomio ed un polinomio

$$3xy\left(5x^2-2y\right)=15x^3y-6xy^2$$

Quoziente di un polinomio per un monomio

$$\left(12x^3y^4-6x^2y^3\right):\left(-3x^2y\right)=-4xy^3+2y^2$$

Prodotto tra polinomi

$$(x+2y-3)(3x+y)=3x^2+xy+6xy+2y^2-9x-3y=3x^2+7xy+2y^2-9x-3y$$

4.1 Prodotti notevoli

Nel calcolo letterale capita spesso di incontrare moltiplicazioni tra particolari polinomi; i relativi sviluppi si ottengono applicando le regole fin qui viste, ma i risultati, opportunamente semplificati, hanno una forma particolare, facilmente memorizzabile. A causa della frequenza con la quale si incontrano tali particolari moltiplicazioni è utile tenere a mente i risultati, applicandoli subito senza passare attraverso l'applicazione delle regole generali.

Di seguito è presentato uno schema che riassume tutti i tipi di prodotti notevoli. Il lettore potrà facilmente verificare la loro validità svolgendo i passaggi intermedi.

QUADRATO DEL BINOMIO	$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
QUADRATO DEL TRINOMIO	$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$
CUBO DEL BINOMIO	$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^2$
PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA (DIFFERENZA DI DUE QUADRATI)	$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
SOMMA DI DUE CUBI	$(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right)=A^3+B^3$
DIFFERENZA DI DUE CUBI	$(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)=A^3-B^3$

Guardando gli sviluppi del Quadrato e del Cubo di un binomio può nascere spontanea la seguente domanda: "Come sarà lo sviluppo di $(A+B)^4$? E della potenza $(A+B)^n$?

Vedi a questo proposito gli Approfondimenti (par. 9.4).

5 Scomposizione di un polinomio in fattori

Per la scomposizione in fattori dei polinomi è necessario sapere cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero intero. Per i polinomi la cosa è oggettivamente più complicata, sia perché non esistono algoritmi generali sia perché non è possibile riconoscere l'**irriducibilità** di un qualunque polinomio (concetto equivalente a quello della primalità di un numero intero). Infatti è facile riconoscere se un dato numero intero positivo è o no un numero primo (è primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso, es. 1,2,3,5,7,11,…), meno facile è riconoscere se un dato polinomio è **scomponibile** in polinomi di grado inferiore al suo.

In ogni caso, deve essere chiaro quando un polinomio è scomposto in fattori oppure no (non quando sia scomponibile), quando cioè l'operazione fondamentale in una scrittura polinomiale è costituita da una o più moltiplicazioni, cui sono subordinate (tra parentesi) le addizioni.

Esempio:

polinomio scomposto in fattori $(2x+y)(2x-y)$

polinomio **non** scomposto in fattori $(2x+y)2x-y$

Come nel caso dei numeri interi la scomposizione in fattori nell'insieme dei numeri naturali è indispensabile per calcolare la somma di frazioni o per la loro semplificazione, così succede nell'insieme dei polinomi. Saper scomporre in fattori è infatti requisito indispensabile per poter introdurre le operazioni con le frazioni algebriche.

L'operazione di scomposizione di un polinomio in fattori primi non è facile e non sempre i polinomi sono **riducibili** cioè **scomponibili**.

Esamineremo alcune tecniche di scomposizione poi costruiremo uno schema generale che ci possa aiutare ad affrontare i casi più comuni.

Raccoglimento a fattor comune totale

La più semplice operazione di scomposizione di un polinomio in fattori consiste nel *mettere in evidenza* il fattore **comune a tutti** i termini del polinomio (si prende il fattore comune più grande tra i fattori comuni, cioè il Massimo Comun Divisore dei termini del polinomio):

$12x^2+6xy=6x(2x+y)$

MCD $(12x^2, 6xy)=6x$

poi si calcolano i quozienti $12x^2/6x=2x$ e $6xy/6x=y$

Raccoglimento a fattor comune parziale

Se con c'è alcun fattore comune a tutti i termini di un polinomio (MCD=1) non è possibile il raccoglimento totale. Nel caso in cui però gruppi di termini hanno fattori in comune si applica il raccoglimento parziale:

$ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)$ attenzione! il polinomio non è stato ancora scomposto

mettendo ora in evidenza il fattore $a+b$, avremo

$x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$

adesso il polinomio di partenza è scomposto.

Riconoscimento di Prodotti notevoli

I prodotti notevoli che abbiamo visto in precedenza possono essere utili per la scomposizione dei polinomi in fattori. Leggendo in senso inverso le uguaglianze che abbiamo dedotto studiando i prodotti notevoli è possibile scomporre in fattori certi tipi di polinomi:

QUADRATO DEL BINOMIO	$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$
QUADRATO DEL TRINOMIO	$A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=(A+B+C)^2$
CUBO DEL BINOMIO	$A^3+3A^2B+3AB^2+B^2=(A+B)^3$
PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA **(DIFFERENZA DI DUE QUADRATI)**	$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$
SOMMA DI DUE CUBI	$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
DIFFERENZA DI DUE CUBI	$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

Va notato che la scomposizione di polinomi, per motivi di segno, non è esattamente unica:
per esempio $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=(-a-b)(-a+b)$

Trinomio particolare di secondo grado

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

Al contrario consideriamo ora un qualunque trinomio

$$x^2+sx+p$$

siamo in grado di scomporlo in fattori se riusciamo a scriverlo nella forma

$$x^2+(a+b)x+ab$$

cioè se siamo in grado di individuare due numeri *a, b,* tali che

- loro somma sia il coefficiente del termine di primo grado, cioè $a+b=s$
- il loro prodotto il termine noto, cioè $ab=p$

Possiamo cioè scrivere

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

La regola vale quando i numeri *a, b* sono numeri reali. Non sempre però tale regola è di facile applicazione per cui ci limiteremo ad applicarla nei casi semplici quando sono due numeri interi.

Esempio

$$x^2 + 5x + 6$$

1) Individuare i due numeri a,b tali che: $a + b = 5$, $a \cdot b = 6$

$$a+b \qquad ab$$
$$2+3 \qquad 2\cdot 3$$

2) Scrivere il prodotto dei due binomi

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

Regola di Ruffini

Sia dato un polinomio $P(x)$, ed un binomio divisore della forma $x - a$, con a un numero reale qualsiasi. Sia $Q(x)$ il quoziente. Dalla relazione fondamentale della divisione possiamo dedurre :

$$P(x) = Q(x)(x-a) + R$$

Il resto R della divisione è un polinomio di grado 0, quindi un numero.

Calcoliamo $P(a)$:

$$P(a) = Q(a)\cdot(a-a) + R = R$$

Quando $R = 0$ si dice che il polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - a$ e la relazione scritta sopra ci fornisce una sua scomposizione in fattori. Il problema diventa allora quello di trovare i binomi del tipo $x - a$.

Si può procedere nel seguente modo:

1. Si determinano i divisori del termine noto p_i
2. Si determinano i divisori del coefficiente del termine di grado massimo q_i
3. Si trovano tutte le possibili frazioni $\frac{p_i}{q_i}$ .Tra questi valori ci sono gli ***a*** cercati
4. Si trova il resto R della divisione calcolando $P(a)$. Si applica in questa fase il Teorema del resto
5. Si prende, se c'è il valore a che rende $P(a)$ nullo. In tal caso il binomio $x - a$ è divisore del polinomio $P(x)$ e quindi questo è scomponibile.

Dopo aver trovato un divisore si esegue la divisione utilizzando la regola di Ruffini.

Esempio

Si vuole scomporre in fattori il polinomio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$

Seguiamo lo schema

1. i divisori del termine noto 6 sono: 1, 2, 3, 6
2. i divisori del coefficiente del termine di grado massimo 2 sono: 1, 2
3. le possibili frazioni sono quindi 1, 2, 3, 6, 1/2, 3/2, di conseguenza i possibili divisori sono $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 3$, $x \pm 6$, $x \pm 1/2$, $x \pm 3/2$
4. applichiamo il Teorema del resto:

$$P(+1) = 2(+1)^3 - 5(+1)^2 - (+1) + 6 = 2 - 5 - 1 + 6 = 2 \neq 0$$ quindi $x-1$ non è divisore

$$P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 6 = -2 - 5 + 1 + 6 = 0$$ quindi $x+1$ è divisore

5. $a = -1$ rende nullo il polinomio, allora il polinomio $P(x)$ è divisibile per $x+1$. Non è necessario a questo punto controllare se ci sono altri divisori, ma andiamo ad eseguire la divisione utilizzando la Regola di Ruffini:

Coefficienti del polinomio $P(x)$

a

	2	-5	-1	6
-1		-2	7	-6
	2	-7	6	0

Resto della divisione

Quoziente della divisione

Otteniamo così la scomposizione seguente

$$P(x) = (x+1)\cdot\left(2x^2 - 7x + 6\right)$$

Per procedere nella scomposizione in fattori , occorre ora operare sul trinomio

$$2x^2 - 7x + 6$$

Poiché nessuno dei procedimenti usuali per i trinomi è applicabile, si ripete su di esso il procedimento di Ruffini a partire dal punto 1.

I possibili divisori sono gli stessi del passaggio precedente, con esclusione di $x-1$ che aveva già dato esito negativo.

Applichiamo il Teorema del resto:

$$Q(-1) = 2(-1)^2 - 7(-1) + 6 = 2 + 7 + 6 \neq 0 \Rightarrow x+1 \quad \text{non è divisore}$$

$$Q(2) = 2(2)^2 - 7(2) + 6 = 8 - 14 + 6 = 0 \Rightarrow x-2 \quad \text{è divisore}$$

Trovato un divisore ripetiamo allora la divisione

	2	-7	6
+2		+4	-6
	2	-3	0

ottenendo la seguente scomposizione

$$2x^2 - 7x + 6 = (x-2)(2x-3)$$

Quindi complessivamente avremo

$$P(x) = (x+1)(x-2)(2x-3)$$

Adesso il polinomio $P(x)$ è completamente scomposto in fattori primi.

Schema generale e riepilogo dei vari casi di scomposizione di un polinomio in fattori

Molte volte si riesce a ottenere la scomposizione di un polinomio in un prodotto di fattori, applicando, opportunamente e successivamente, i procedimenti che abbiamo indicato nei casi precedenti.

Non esistono regole fisse secondo le quali procedere; può però essere utile ricordare quanto segue:

- per prima cosa si cerca di mettere in evidenza un possibile fattore comune a tutti i termini (*Raccoglimento a fattor comune totale*);
- si può tentare un *Raccoglimento parziale*;
- si può tentare di riconoscere nel polinomio lo sviluppo di uno dei *Prodotti notevoli*;
- se il polinomio è di secondo grado si può cercare di esprimerlo nella forma del *Trinomio particolare di 2° grado*;
- si può infine usare la Regola di Ruffini.

In conclusione per scomporre in fattori un polinomio è bene innanzitutto controllare se è possibile effettuare un *Raccoglimento a fattor comune*. Tale raccoglimento ha la precedenza su qualunque altra tecnica. Successivamente si contano i termini (monomi) del polinomio. I casi più comuni che si possono ottenere sono:

Polinomio	Può essere
Binomio	**Raccoglimento a fattor comune totale** **Differenza di potenze** (in particolare **Differenza di quadrati**)
Trinomio	**Raccoglimento a fattor comune totale** **Quadrato di un binomio** **Trinomio particolare di secondo grado** **Regola di Ruffini**
Quadrinomio	**Cubo di un binomio** **Raccoglimento a fattor comune parziale** **Regola di Ruffini** **Combinazione dei metodi precedenti** **......** artifici vari che si imparano con la pratica
Altri metodi, artifici e trucchi vari si imparano poi, se necessario, con l'esperienza.	

Come applicazione della Regola di Ruffini si ha:

La differenza di due potenze di uguale esponente è sempre divisibile per la differenza delle basi.

La differenza di due potenze di ugual esponente è divisibile per la somma delle basi solo se l'esponente è pari.

La somma di due potenze di ugual esponente è divisibile per la somma delle basi solo se l'esponente è dispari.

La somma di due potenze di ugual esponente non è mai divisibile per la differenza delle basi.

Osserva la seguente tabella:

Differenza di potenze	Somma di potenze
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$	$x^2 + a^2 =$ *non è scomponibile*
$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$	$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$
$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$	$x^4 + a^4 =$ *non è scomponibile*
$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$	$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)$

6 M.C.D. e m.c.m. tra polinomi

Come in Aritmetica, così nel calcolo letterale la scomposizione in fattori viene utilizzata per determinare il minimo comune multiplo (m.c.m.) e il Massimo Comune Divisore (M.C.D.) di polinomi: operazione indispensabile quando si opera con le frazioni algebriche.

Regola di calcolo

M.C.D. tra numeri	m.c.m. tra numeri
Il ***M.C.D.*** tra due o più numeri è il prodotto tra i fattori primi comuni ai numeri dati, e presi ciascuno una sola volta con il minore esponente con cui figurano nella scomposizione.	Il **m.c.m.** tra due o più numeri è il prodotto dei loro fattori primi comuni o non comuni, presi ciascuno una sola volta con il maggiore esponente con cui figurano nella scomposizione.
M.C.D. tra polinomi	**m.c.m. tra polinomi**
Scomposti i polinomi dati in fattori irriducibili, il ***M.C.D.*** tra due o più polinomi è il prodotto di tutti e soli i fattori comuni ai polinomi dati, e presi ciascuno una sola volta e con il minore esponente con cui figurano nella scomposizione.	Scomposti i polinomi dati in fattori irriducibili, il **m.c.m.** tra due o più polinomi è il prodotto di tutti i fattori comuni e non comuni ai polinomi dati, presi ciascuno una sola volta e con il maggiore esponente con cui figurano nella scomposizione.

Osservazione

Prima di costruire il M.C.D. ed il m.c.m. fra polinomi è indispensabile che ognuno di essi venga scomposto in fattori primi facendo riferimento ai procedimenti visti nel paragrafo precedente.

Esempio

Siano dati i polinomi:

$3x^4 - 3x^2$ $\qquad 9x^2 + 18x + 9$ $\qquad 6x^3 + 6x^2$

scomponendo i polinomi in fattori, si ha

$$3x^4 - 3x^2 = 3x^2(x^2-1) = 3x^2(x-1)(x+1)$$

$$9x^2 + 18x + 9 = 9(x^2+2x+1) = 9(x+1)^2$$

$$6x^3 + 6x^2 = 6x^2(x+1)$$

quindi avremo

$$M.C.D. = 3(x+1) \qquad m.c.m. = 18x^2(x+1)^2(x-1)$$

7 Frazioni algebriche

Le **frazioni algebriche** sono denotate con il simbolo

$$\frac{A}{B}$$

essendo A e B dei monomi o dei polinomi. La frazione algebrica $\frac{A}{B}$ indica quindi il quoziente tra A e B.

I termini della frazione sono A *numeratore* e B *denominatore* (che deve essere $\neq 0$ essendo il divisore di una divisione).

Ad esempio, sono frazioni algebriche le espressioni

$$\frac{2a-b}{a^2-3ab+2b^2} \qquad \frac{3}{2a} \qquad \frac{3xy}{x^2-x+1}$$

Una frazione algebrica ha significato per tutti i valori delle lettere che vi compaiono eccetto per gli eventuali valori che rendono il denominatore uguale a zero. Quindi quando si opera con frazioni algebriche è necessario escludere i valori delle lettere che rendono nullo il denominatore.

Ad esempio la frazione

$$\frac{4x+1}{x^2-1}$$

non ha significato per $x=1$ e per $x=-1$, perché per tali valori di x il denominatore x^2-1 assume il valore zero.

Nel calcolo con frazioni algebriche la fase in cui si escludono i valori delle lettere che annullano il denominatore prende il nome di *studio delle condizioni di esistenza* della frazione stessa, e nelle applicazioni, riferendoci all'esempio precedente, possiamo scrivere nel seguente modo:

$$\frac{4x+1}{x^2-1}$$

C.E. $\quad x \neq 1,\ x \neq -1$

oppure in sintesi: C.E. $\quad x \neq \pm 1$.

Per le frazioni algebriche valgono le stesse proprietà note per le frazione numeriche.

Si può cioè applicare la stessa procedura per semplificare una frazione oppure ridurre allo stesso denominatore due o più frazioni. Si possono inoltre eseguire le varie operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e potenza con gli stessi criteri.

Per affrontare bene il calcolo sulle frazioni algebriche sono richiesti i seguenti prerequisiti:

- Tecniche di calcolo per operare con monomi e polinomi.
- Metodi di scomposizione in fattori di polinomi.
- Calcolo del M.C.D. per la semplificazione di una frazione.
- Calcolo del m.c.m. per ridurre più frazioni allo stesso denominatore e quindi eseguire la somma algebrica di due o più frazioni algebriche.

Vediamo alcuni esempi di esercizi svolti:

Semplificazione di una frazione algebrica

$$\frac{3x^2-6xy}{x^2-4y^2} = \frac{3x\cancel{(x-2y)}}{\cancel{(x-2y)}(x+2y)} = \frac{3x}{x+2y}$$

frazione ridotta ai minimi termini

scomposizione

semplificazione

Riduzione allo stesso denominatore

$$\frac{2a}{a^2-4a+4} = \frac{2a}{(a-2)^2} = \frac{2a(a)(a+2)}{a(a+2)(a-2)^2} = \frac{2a^2(a+2)}{a(a+2)(a-2)^2}$$

$$\frac{3}{a^2+2a} = \frac{3}{a(a+2)} = \frac{3(a-2)^2}{a(a+2)(a-2)^2}$$

$$\frac{a^2-4}{a^2+4a+4} = \frac{(a-2)(a+2)}{(a+2)^2} = \frac{a-2}{a+2} = \frac{(a-2)(a)(a-2)^2}{a(a+2)(a-2)^2} = \frac{a(a-2)^3}{a(a+2)(a-2)^2}$$

scomposizione

riduzione ai minimi termini

m.c.m.(denominatori) è $a(a+2)(a-2)^2$

Somma algebrica di due o più frazioni algebriche

$$2+\frac{1}{a^2+a}-\frac{a^2-a}{a^2-1}=$$

Scomposizioni

$$2+\frac{1}{a(a+1)}-\frac{a\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a+1)}=$$

Riduzioni ai minimi termini

$$\frac{2a(a+1)+1-a^2}{a(a+1)}=$$

m.c.m. $= a(a+1)$

$$\frac{2a^2+2a+1-a^2}{a(a+1)}=$$

Sviluppo dei calcoli al numeratore

$$\frac{a^2+2a+1}{a(a+1)}=$$

$$\frac{(a+1)^{\cancel{2}}}{a\cancel{(a+1)}}=$$

Scomposizione del numeratore

$$\frac{a+1}{a}$$

Eventuale semplificazione della frazione

8 Esercitazioni

Vengono di seguito presentati **4** ***Test a scelta multipla*** (nei quali per ciascun quesito c'è una sola risposta giusta) su Monomi, Polinomi, Scomposizioni in fattori e Frazioni algebriche ed una ***Verifica finale***.

Il lettore che volesse esercitarsi su tali test deve considerarli come strumenti per una autovalutazione e come spunti di riflessione per eventuali discussioni con il docente.

Unità 1 – Monomi

1. *Quale delle seguenti espressioni traduce la frase* "il triplo prodotto del quadrato di un termine per l'altro"?

A☐ $3a^2 3b$ B☐ $(a^2b)^3$ C☐ $3a^2b$ D☐ *nessuna delle precedenti*

2. *Se* $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=3$, *allora il monomio* $-4a^2b^2c^3$ *vale:*

A☐ -27 B☐ 27 C☐ -54 D☐ *nessuno dei valori precedenti*

3. *Solo uno dei seguenti monomi* non *è mai negativo, qualunque sia il valore attribuito alle lettere. Quale?*

A☐ $-2x^3y^3$ B☐ $2x^2y^2$ C☐ $4x^2y$ D☐ xy^2

4. *Solo uno dei seguenti è un monomio di grado 5. Quale?*

A☐ $-3abc^4$ B☐ $+5a^2bc$ C☐ $3a^3+b^2$ D☐ $+6a^3bc$

5. *Solo uno, tra i seguenti monomi, non è simile agli altri. Quale?*

A☐ $2xy^2z^3$ B☐ $-\frac{1}{3}xy^2z^3$ C☐ xz^3y^2 D☐ $3xy^3z^2$

6. *L'addizione* $3a+a$ *dà:*

A☐ $4a$ B☐ $3a^2$ C☐ $4a^2$ D☐ *nessuno dei precedenti risultati*

7. *Semplificando l'espressione* $\frac{1}{4}a^2b-ab^2+\frac{2}{5}ab^2-a^2b$ *si ottiene:*

A☐ $-\frac{27}{20}a^6b^6$ B☐ $-\frac{3}{5}ab^2-\frac{3}{4}a^2b$ C☐ $-\frac{27}{20}a^2b^2$ D☐ *nessuno dei precedenti risultati*

8. *La moltiplicazione* $(-5ab^3)\cdot(7a^2b^4c)$ *dà:*

A☐ $-35a^2b^7c$ B☐ $-35a^2b^{12}c$ C☐ $-35a^2b^4$ D☐ *nessuno dei precedenti risultati*

9. *La divisione* $\frac{1}{4}x^4y^6z^3:\left(-\frac{2}{3}\right)xy^3z^3$ *dà:*

A☐ $-\frac{3}{8}x^3y^3z$ B☐ $-\frac{3}{8}x^3y^3$ C☐ $-\frac{3}{8}x^4y^2$ D☐ *nessuno dei precedenti risultati*

10. *Solo una di queste divisioni* non *dà come risultato un monomio. Quale?*

A☐ $(2x^3y):(-3x^2y)$ B☐ $(8x^4y):(4x^4y)$ C☐ $(-2x^3y^2):(x^3y^3)$ D☐ $(-4x^3yz^2):(-7)$

11. *La potenza* $(-2ab^2c^4)^3$ *è:*

A☐ $-8a^3b^6c^{12}$ B☐ $-8a^3b^8c^{64}$ C☐ $-8a^3b^8c^{12}$ D☐ *nessuno dei precedenti risultati*

12. *Il risultato dell'espressione* $(-2xy)^3+(-x^2)\cdot(xy^3)$ *è …*

A☐ x^3y^3 B☐ $-x^3y^3$ C☐ $-3x^3y^3$ D☐ *nessuno dei precedenti*

13. *Il risultato dell'espressione* $2xy^2z-3xy^2z\cdot(4xy^4)^2$ *è …*

A☐ $2xy^2z-48x^3y^{10}z$ B☐ $-16x^3y^{10}z$ C☐ $2xy^2z-144x^4y^{12}z^2$ D☐ *nessuno dei precedenti*

14. *Il massimo comune divisore tra i monomi* $18a^2b^4c^3$, $12a^3b^4cd$, $30a^3b^3d$ *è …*

A☐ $90a^3b^4c^3d$ B☐ $90\ a^2b^3$ C☐ $6a^2b^3$ D☐ *nessuno dei precedenti*

15. *Il minimo comune multiplo tra i monomi* $18a^2b^4c^3$, $12a^3b^4cd$, $30a^3b^3d$ *è …*

A☐ $90a^3b^4c^3d$ B☐ $90\ a^2b^3$ C☐ $6a^2b^3$ D☐ *nessuno dei precedenti*

Unità 2 – Polinomi

1. *Qual è, riscritta in simboli, l'equivalente della frase:* "il triplo prodotto del cubo di un primo termine per il secondo più il doppio prodotto del primo termine per il quadrato del secondo*"?*

A☐ $3a^33b+2a2b^2$ B☐ $(a^3b)^3+(ab^2)^2$ C☐ $3a^3b+2ab^2$ D☐ *nessuna delle precedenti*

2. *Quale dei seguenti polinomi non è mai negativo qualunque siano i valori numerici che si sostituiscono alle lettere?*

A☐ $a+b$ B☐ a^2+b^2 C☐ $1000a+1000b$ D☐ *nessuno dei precedenti*

3. *Quale dei seguenti è un trinomio omogeneo di quarto grado?*

A☐ $xy^4+x^4y+x^2y^2$ B☐ $x^2y^2+xy^3+1$ C☐ $2xy^3-3x^2y^2+4x^2y^2$ D☐ *nessuno dei precedenti*

4. *Quale tra i seguenti è l'opposto del polinomio* $ab^3-2ab+3b$ *?*

A☐ $-ab^3-2ab+3b$ B☐ $-ab^3+2ab+3b$ C☐ $-ab^3-2ab-3b$ D☐ *nessuno dei precedenti*

5. *Il binomio* $8x^5y^2+6x^3y$ *è il risultato di quale delle seguenti moltiplicazioni?*

A☐ $2x^2\cdot 4x^3y^2+3xy$ B☐ $2x^2\cdot(4x^3y^2+3xy)$ C☐ $(2x^2)\cdot 4x^3y^2+3xy$ D☐ *nessuna delle precedenti*

6. *Qual è il risultato della moltiplicazione* $(2a^2b-3ab^2)\cdot(a-2b-1)$*?*

A☐ $2a^3-7a^2b^2+6ab^3$ B☐ $2a^3b-9a^2b^2-6ab^3-3ab^2$ C☐ $12a^4b^4$ D☐ *nessuno dei precedenti*

7. *In quale caso il prodotto di due polinomi è uguale a 0?*

A☐ *quando sono ambedue uguali a 0*

B☐ *quando almeno uno dei due è uguale a 0*

C☐ *quando i due polinomi sono l'uno l'opposto dell'altro*

D☐ *in nessun caso*

8. *Una sola delle seguenti uguaglianze è vera per ogni valore delle lettere. Quale?*

A☐ $(x+y)^2=x^2+y^2$ B☐ $(x+y)\cdot(a+b)=ax+by$ C☐ $(x-y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$ D☐ $2(x+y)=2x+2y$

9. *Qual è il risultato di* $(-2a^2-1)(-2a^2+1)$?

A☐ $1-4a^4$ B☐ $4a^4-1$ C☐ $4a^4+1-4a^2$ D☐ *nessuno dei precedenti*

10. *Quale dei seguenti è un prodotto del tipo* somma per differenza?

A☐ $(a-b)(a-b)$ B☐ $(a-b)(-a+b)$ C☐ $(-a+b)(-a+b)$ D☐ *nessuno dei precedenti*

11. *Qual è il risultato di* $\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)^2$?

A☐ $a^2-\frac{1}{4}b^2$ B☐ $a^2-\frac{1}{4}b^4$ C☐ $a^2+\frac{1}{4}b^4$ D☐ *nessuno dei precedenti*

12. *Il quadrato del trinomio* $(3x-5y+2xy^2)^2$ *è uguale a* $9x^2+25y^2+4x^2y^4+\ldots$

A☐ $\ldots-60x^2y^3$ B☐ $\ldots-30xy-20xy^3$ C☐ $\ldots-30xy+12x^2y^2-20xy^3$ D☐ *nessuno dei precedenti*

13. *Il polinomio* $-a^3-6a^2-12a-8$ *è il risultato di …*

A☐ $(a-2)^3$ B☐ $(-a-2)^3$ C☐ $(-a+2)^3$ D☐ *nessuno dei precedenti*

14. *Semplificando l'espressione* $\left(a^2+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}-a^2\right)\left(\frac{3}{4}+a^2\right)-(-a)^2$ *si ottiene:*

A☐ $\frac{1}{2}a^2$ B☐ $2a^4+\frac{1}{2}a^2$ C☐ $2a^4+\frac{5}{2}a^2$ D☐ *nessuno dei precedenti*

15. *Effettuando la divisione* $(5x^3-2x^2+3x-4):(x^2-2x+1)$ *si ottiene* come resto:

A☐ 0 B☐ $14x-12$ C☐ $-26x-16$ D☐ *nessuno dei precedenti*

Unità 3 – Scomposizione

1. *Uno solo tra i seguenti polinomi è scomposto in fattori. Quale?*

A☐ $a(x-y)-a(x+y)$ B☐ $(2a-b)^2+(a-b)(a+b)$ C☐ $2(a-3b)+1$ D☐ $2(a-b)(x+y)$

2. *Il MCD dei termini del polinomio* $12a^2b^3c^4-8a^3b^5c^4d+6a^2b^4c^4$ *è …*

A☐ $2a^2b^3c^4$ B☐ $24a^2b^3c^4$ C☐ $2a^3b^5c^4d$ D☐ *nessuno dei precedenti*

3. *Mettendo in evidenza un fattore comune, il polinomio* $3a^3-2a^2+a$ *si scompone in …*

A☐ $a(3a^2-2a+1)$ B☐ $a(3a^2-2a)$ C☐ $a^2(3a-2)+a$ D☐ *nessuno dei precedenti*

4. *Mettendo in evidenza per parti, il polinomio* $2x^2y-xy+2x^2-x$ *si scompone in …*

A☐ $xy(2x-1)+x(2x-1)$ B☐ $x(2x-1)(y+1)$ C☐ $2x^2(y+1)-x(y+1)$ D☐ *nessuno dei precedenti*

5. *Il polinomio* $25x^4-30x^2y^3+9y^6$ *si scompone in …*

A☐ $(5x^2-3y^3)(5x^2+3y^3)$ B☐ $(5x^2-3y^3)^2$ C☐ $(5x^2-15xy+3y^3)^2$ D☐ *nessuno dei precedenti*

6. *Il polinomio* $64a^3-240a^2+300a-125$ *si scompone in …*

A☐ $(4a-80a+100a-5)^3$ B☐ $16a^2(4a-15)+25(12a-5)$ C☐ $(4a-5)^2$ D☐ *nessuno dei precedenti*

7. *Quale delle seguenti espressioni occorre aggiungere a* $4a^2b^4+24a^3b^3$ *per ottenere il quadrato di un binomio?*

A☐ $6a^4b^4$ B☐ $6a^4b^2$ C☐ $36a^4b^2$ D☐ *nessuna delle precedenti*

8. *Uno solo dei seguenti è il quadrato di un binomio. Quale?*

A☐ $a^4-a^2+\frac{1}{4}$ B☐ $a^4-2a^2+\frac{1}{4}$ C☐ $a^4-\frac{1}{4}$ D☐ $a^4+a^2-\frac{1}{4}$

9. *Una sola delle seguenti affermazioni è necessariamente vera. Quale?*

A☐ *il polinomio che esprime il quadrato di un binomio ha almeno due monomi con segno positivo*

B☐ *il polinomio che esprime il quadrato di un binomio ha almeno tre monomi con segno positivo*

C☐ *il polinomio che esprime la differenza di due quadrati ha almeno due monomi con segno positivo*

D☐ *il polinomio che esprime il cubo di un binomio ha almeno due monomi con segno positivo*

10. *Uno solo dei seguenti è uno zero per il polinomio* $p(x) = 2x^3-2x^2+2x+6$. *Quale?*

A☐ 2 B☐ 1 C☐ 0 D☐ −1

11. *Se dividendo un polinomio* $p(x)$ *per il polinomio* $a(x)\neq 0$, *si ottiene come quoziente* $q(x)$ *e come resto* $r(x)$, *allora* $p(x) = \ldots$

A☐ $q(x) + r(x)$ B☐ $q(x)\cdot a(x)+r(x)$ C☐ $q(x)\cdot a(x)\cdot r(x)$ D☐ *nessuno dei precedenti*

12. *Scomponendo in fattori il polinomio* x^2-8x-9 *si ottiene …*

A☐ $(x-1)(x-9)$ B☐ $(x+1)(x-9)$ C☐ $(x-1)(x+9)$ D☐ *nessuno dei precedenti*

13. *Scomponendo in fattori il polinomio* $16a^4-1$ *si ottiene …*

A☐ $(2a-1)^2(2a+1)^2$ B☐ $(2a-1)^4$ C☐ $(2a-1)(2a+1)(4a^2+1)$ D☐ *nessuno dei precedenti*

14. *Uno solo dei seguenti polinomi non è ulteriormente scomponibile. Quale?*

A☐ a^4+1 B☐ a^4-1 C☐ a^3+1 D☐ a^3-1

15. *Per quale valore reale di* k *l'espressione* $a^4b^2-18a^2b+k-1$ *è il quadrato di un binomio per qualunque valore di* a *e* b*?*

A☐ 5 B☐ 10 C☐ 82 D☐ *nessuno dei precedenti*

Unità 4 – Frazioni algebriche

1. *Una sola di queste frasi definisce il massimo comune divisore tra più polinomi in una sola variabile. Quale?*

A☐ *è il polinomio di grado maggiore tra quelli che dividono i polinomi dati*

B☐ *è il polinomio maggiore tra quelli che dividono i polinomi dati*

C☐ *è il polinomio di grado maggiore tra quelli divisibili per i polinomi dati*

D☐ *è il polinomio maggiore tra quelli divisibili per i polinomi dati*

2. *Il massimo comune divisore tra i polinomi*

   a^2-ab $\quad$ $a^3+a^2b-ab^2-b^3$ $\quad$ $a^2b+b^3-2ab^2$

   è:

A☐ ab $\quad$ B☐ $a-b$ $\quad$ C☐ $ab(a-b)^2(a-b)^2$ $\quad$ D☐ *nessuno dei precedenti*

3. *Il minimo comune multiplo tra i polinomi*

   a^2-ab $\quad$ $a^3+a^2b-ab^2-b^3$ $\quad$ $a^2b+b^3-2ab^2$

   è:

A☐ ab $\quad$ B☐ $a-b$ $\quad$ C☐ $ab(a-b)^2(a+b)^2$ $\quad$ D☐ *nessuno dei precedenti*

4. *Il massimo comune divisore tra i polinomi*

   $4a^3b^3+8a^2b^4$ $\quad$ $6ax+12bx-18ay-36by$ $\quad$ $8a^5+32a^4b+32a^3b^2$

   è:

A☐ $24a^3b^3(a+2b)^2(x-3y)$ $\quad$ B☐ $2(a+2b)^2$ $\quad$ C☐ $2(a+2b)$ $\quad$ D☐ *nessuno dei precedenti*

5. *Il minimo comune tra i polinomi*

   x^3-y^3 $\quad$ x^2-y^2 $\quad$ $x^2-2xy+y^2$

   è:

A☐ $x-y$ $\quad$ B☐ x^3-y^3 $\quad$ C☐ $(x-y)^2(x+y)$ $\quad$ D☐ *nessuno dei precedenti*

6. *Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale?*

A☐ *Se il minimo comune multiplo di due polinomi è uguale a 1, allora il loro massimo comune divisore è uguale al loro prodotto*

B☐ *Se il minimo comune multiplo di due polinomi è uguale al loro prodotto, allora il loro massimo comune divisore è uguale a 1*

C☐ *Se il massimo comune divisore di due polinomi è uguale al loro rapporto, allora il loro minimo comune è ultimo*

D☐ *Se il massimo comune divisore di due polinomi è uguale al loro rapporto, allora il loro minimo comune non esiste*

7. *Di due polinomi si conoscono il MCD e il mcm. Si può allora sicuramente dedurre:*

A☐ *quali sono i due polinomi*

B☐ *qual è il polinomio di grado maggiore*

C☐ *qual è il polinomio di grado minore*

D☐ *nessuna delle precedenti*

8. *Soltanto una delle seguenti frazioni algebriche non è equivalente alle altre. Quale?*

A☐ $-3\dfrac{xy^{-2}}{z}$ B☐ $-3\dfrac{x}{y^2 z}$ C☐ $\dfrac{-3x}{y^2 z}$ D☐ $\dfrac{-3y^2}{x^{-1}z}$

9. *In una sola delle seguenti divisioni si ottiene una frazione algebrica. In quale?*

A☐ $(-2a^3b^4):(-3ab^4)$ B☐ $0:(-4x^4y^2)$ C☐ $(4a^2b^4):(-2ab^5)$ D☐ $(-7x^3y^8):(3x^3y^8)$

10. *La frazione* $\dfrac{a-2}{b-3}$ *non ha significato per …*

A☐ $a=2$ B☐ $b=-3$ C☐ $a=2$ *e* $b=3$ D☐ $b=3$

11. *Uno solo dei seguenti calcoli è diverso dagli altri. Quale?*

A☐ $1-\dfrac{1-a}{a}$ B☐ $2a-\dfrac{1}{a}$ C☐ $-\dfrac{1}{a}+2$ D☐ $\dfrac{a-1}{a}+1$

12. *Semplificando la frazione* $\dfrac{x^2-xy}{y^2-xy}$ *si ottiene:*

A☐ $\dfrac{x^2}{y^2}$ B☐ $-\dfrac{x}{y}$ C☐ $\dfrac{x}{y}$ D☐ *nessuna delle precedenti*

13. *Sviluppando l'espressione* $\left(1-\dfrac{b}{a+2b}\right)^2$ *si ottiene:*

A☐ $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+4ab+4b^2}$ B☐ $\dfrac{1}{4}$ C☐ $\dfrac{1+b^2-2b}{a^2+4b^2+4ab}$ D☐ *nessuna delle precedenti*

14. *Semplificando l'espressione* $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}$ *si ottiene:*

A☐ -1 B☐ 1 C☐ $-\dfrac{1}{a}$ D☐ *nessuna delle precedenti*

15. *Semplificando l'espressione* $\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{y}{y-1}\right):\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-y}\right)$ *si ottiene:*

A☐ -1 B☐ 1 C☐ 0 D☐ *nessuna delle precedenti*

Compito in classe di verifica finale

- *Esercizio 1*

Inserendo delle opportune parentesi, effettua le sostituzioni
$a=-2$ $\qquad b=-1$
nell'espressione

$$\frac{1-a(a-b(1-a))}{1-b(a-1)^2}$$

e quindi calcola il risultato.

- *Esercizio 2*

Scrivi una formula che utilizzi le prime lettere dell'alfabeto e corrisponda alla seguente frase:
"*Il cubo della somma di due numeri qualunque è diverso dal quadrato del primo più il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo*"

- *Esercizio 3*

Scomponi in fattori i seguenti polinomi:
a) $x^2+2xy-1+y^2$
b) $32a^2-16ab+2b^2-2c^2+12c-18$
c) x^6-64
d) $15abx-10axy+6bc^2-4c^2y$
e) a^2+a-42

- *Esercizio 4*

Calcola il MCD e il mcm dei seguenti polinomi:
$ac-bc-ad+bd \qquad ax-bx-ay+by \qquad a^2-b^2 \qquad a^2+b^2-2ab$

- *Esercizio 5*

Nel polinomio di secondo grado $p(x)=x^2-5x-6$ si effettua la sostituzione $x=2t-1$. Scrivi il polinomio nella variabile t che così si ottiene e scomponilo in fattori.
Tenendo conto che $2t=x+1$, deduci dalla scomposizione in fattori del polinomio nella variabile t la scomposizione in fattori di $p(x)$.

- *Esercizio 6*

Scrivi una frazione algebrica che abbia le seguenti caratteristiche:
a) come numeratore ha un polinomio di primo grado nella sola variabile x
b) come denominatore ha un polinomio di secondo grado nella sola variabile x
c) è uguale a 0 per $x=-2$
d) non ha significato per $x=1$ o per $x=4$

- *Esercizio 7*

Calcola:

$$\left(a+\frac{a^2-3ab}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$$

- *Esercizio 8*

Calcola:

$$\left(\left(a+1+\frac{2}{a-1}\right):\left(a-1+\frac{2}{a+1}\right)\right)^2\cdot\left(a+\frac{a+4}{a+3}\right):\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}$$

9 *Approfondimenti*

9.1 Dimostrazione algebrica

Uso del calcolo letterale in una dimostrazione:
Pensate un numero e sommateci 1, poi fate il quadrato di quello che avete ottenuto, poi sottraete 1, quindi dividete per il numero pensato e sottraete per il numero pensato. Cosa ottenete?

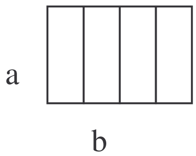
Soluzione:

$$\left[(a+1)^2-1\right]: a-a=2$$

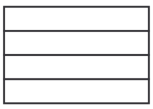
9.2 Problema del parallelepipedo

Dividendo un foglio A4 in 4 parti uguali formiamo un parallelepipedo. Otteniamo lo stesso volume dividendo in lunghezza e in larghezza?

Soluzione:



$$V=\left(\frac{b}{4}\right)^2\cdot ab$$

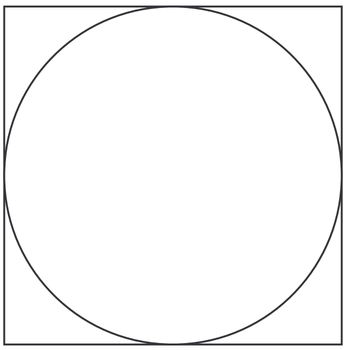


$$V=\left(\frac{a}{4}\right)^2\cdot b$$

9.3 Problema risolto con il calcolo letterale

Aumentando le circonferenze, la parte esterna alle circonferenze aumenta?

1 circonferenza



$l=12cm$

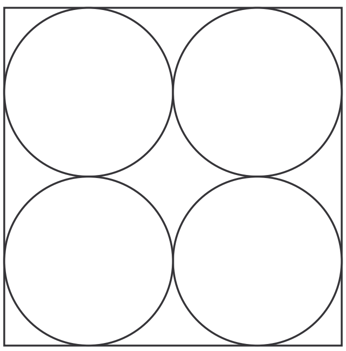
$r=6cm$

$Aq=144cm^2$

$Ac=36\pi cm^2$

$Pe=144-36\pi$

4 circonferenze



$l=12cm$

$r=3cm$

$Aq=144cm^2$

$Ac=9\pi cm^2$

$Pe=144-4(9\pi)$

Soluzione:

n^2 circonferenze (n per lato)

$$l = 12cm$$

$$r = \frac{12}{2n}cm$$

$$Aq = 144cm^2$$

$$Ac = \left(\frac{12}{2n}\right)^2 \pi cm^2$$

$$Pe = 144 - n^2\left[\left(\frac{12}{2n}\right)^2 \pi\right]$$

9.4 Il Triangolo di Tartaglia

Il triangolo di Tartaglia è uno schema a forma triangolare nel quale compaiono numeri interi positivi legati tra loro da delle relazioni.

Ogni termine, tranne quelli posti sui lati obliqui che sono pari ad 1, è uguale alla differenza tra il termine posto nella riga inferiore alla sua sinistra e quello alla sua sinistra sulla stessa riga, es. $10 = 15 - 5$; inoltre ogni termine, tranne quelli posti sui lati obliqui, è uguale alla somma dei termini posti subito sopra di esso; es. $3 = 1 + 2$).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

I coefficienti degli sviluppi delle potenze di un binomio sono dati proprio dai termini del Triangolo di Tartaglia:

$$\begin{aligned}
(A+B)^0 &= 1 \\
(A+B)^1 &= A + B \\
(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\
(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\
(A+B)^4 &= A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \\
(A+B)^5 &= A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 \\
(A+B)^6 &= A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6 \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{aligned}$$