Prodotti notevoli

ITIS Feltrinelli – IDEI classe III

I prodotti notevoli

- Quando moltiplichiamo tra loro due polinomi che hanno la stessa struttura, ad esempio (a+b)(a-b) oppure (ac+bd)(ac+bd) siamo dinanzi ad un prodotto notevole.
- Vi sono dunque dei prodotti particolari, riconducibili a delle formule che ci consentono di scriverne direttamente la soluzione senza dover effettuare la moltiplicazione termine a termine.
- Tali prodotti si dicono **prodotti notevoli**

Vediamo quali sono nelle pagine successive.

Il quadrato di un binomio

- **Quadrato di un binomio.**

  Può assumere due forme: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

  $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

ATTENZIONE: abbiamo scritto, per semplicità, a e b, ma intendiamo sempre gruppi di lettere, cioè monomi, e quindi avremo prodotti del tipo $(a^3c + d)^2$

Regola: il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine più il doppio prodotto del primo per il secondo termine, più il quadrato del secondo termine.

In forma compatta: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Esempio: $(a^3c + d)^2 = a^6c^2 + 2a^3c\,d + d^2$

Il quadrato di un polinomio

- **Quadrato di un polinomio.**

Assume la forma:

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b) + c = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ovviamente qui abbiamo scritto un polinomio composto da tre termini, ma i termini possono essere quattro, cinque e così via…

ATTENZIONE: anche in questo caso abbiamo scritto, per semplicità, a, b e c, ma intendiamo sempre gruppi di lettere, cioè monomi, e quindi avremo prodotti del tipo $(a^3c + d + ab)^2$

Regola: il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati di ciascun termine più il doppio prodotto di ciascun termine per tutti i termini che lo seguono.

Esempio: $(a^3c + d + ab)^2 = a^6c^2 + d^2 + a^2b^2 + 2a^3c\,d + 2a^4c\,b + 2abd$

Somma di due termini per la differenza di due termini

- **somma di due termini moltiplicata per la differenza di due termini.**

Assume la forma:

$(a + b)(a - b) =$

Se provassimo a sviluppare il prodotto termine a termine, otterremmo:

$= a^2 + 2ab - 2ab - b^2 =$ e quindi, fatte le opportune semplificazioni $= a^2 - b^2$

ATTENZIONE: abbiamo scritto, anche in questo caso, a e b, ma, al solito, intendiamo gruppi di lettere, cioè monomi, e quindi avremo prodotti del tipo $(a^3c + d)\ (a^3c - d)$

Regola: la somma di due termini moltiplicata per la loro differenza è uguale alla differenza tra i quadrati dei due termini.

$\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

Esempio: $(a^3c + d)\ (a^3c - d) = a^6c^2 - d^2$

Cubo di un binomio

- **cubo di un binomio.**

Assume la forma:

$(a + b)^3$

ATTENZIONE: come nei casi precedenti, abbiamo scritto a e b, ma, al solito, intendiamo gruppi di lettere, cioè monomi, e quindi avremo prodotti del tipo $(a^3c + d)^3$

Regola: il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo termine più il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, più il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo, più il cubo del secondo termine.

$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$

I segni dei termini dipendono dai segni di **a** e di **b**, e cioè:

- Se **a, b** sono entrambi positivi, i termini del risultato sono tutti positivi
- Se **a, b** sono entrambi negativi, i termini del risultato sono tutti negativi
- Se **a** è positivo e **b** è negativo, i termini del cubo hanno alternativamente il segno positivo e il segno negativo
- Se **a** è negativo e **b** è positivo, i termini del cubo hanno alternativamente il segno negativo e il segno positivo

Esempio: $(a^3c - d)^3 = a^6c^2 – 3a^6c^2d + 3a^3cd^2 – d^3$

Il triangolo di Tartaglia

ovvero "come fare meno fatica ed evitare di imparare le regole a memoria"...

Dopo qualche esercizio, vedrete che le regole viste nelle pagine precedenti vi rimarranno facilmente impresse, ma cosa succede **se voglio elevare alla quarta, o alla quinta o, peggio, alla nona un binomio?** Sicuramente non è facile determinare i coefficienti da mettere davanti termini compresi tra il primo e l'ultimo (che avranno sempre la potenza uguale a quella cercata) e poi le potenze dei gruppi di lettere intermedi?

Componete un triangolo fatto così: sulla prima riga poniamo 1 e 1. Sulla seconda iniziamo con 1, poi mettiamo 2 (la somma dei due 1 della riga precedente) e concludiamo con 1. Sulla terza iniziamo con 1, poi mettiamo 3 (la somma dell'1 e del 2 della riga precedente), di nuovo 3 (ottenuto sempre con la somma del 2 con l'1 che lo segue e concludiamo sempre con l'1… andiamo avanti così, ottenendo un triangolo come quello riportato qui sotto:

Riga 1 → n = 1	**1 1**	fornisce i coefficienti di $(a + b)^1$
Riga 2 → n = 2	**1 2 1**	fornisce i coefficienti di $(a + b)^2$
Riga 3 → n = 3	**1 3 3 1**	fornisce i coefficienti di $(a + b)^3$
Riga 4 → n = 4	**1 4 6 4 1**	fornisce i coefficienti di $(a + b)^4$
Riga 5 → n = 5	**1 5 10 10 5 1**	fornisce i coefficienti di $(a + b)^5$
Riga 6 → n = 6	**1 6 15 20 15 6 1**	fornisce i coefficienti di $(a + b)^6$

Attenzione: se ci fosse una riga zero, sarebbe così: 1 e corrisponderebbe a $(a+b)^0$ cioè1!!!

Vediamo qualche esempio alla pagina successiva…

Il triangolo di Tartaglia

Proviamo a fare $(a + b)^5$

Dobbiamo prendere la 5° riga. Avremo allora:

$a^5 + 5ab + 10ab + 10ab + 5ab + b^5$

Ok per i coefficienti davanti ai gruppi letterali. Non ho messo, però, gli esponenti nei gruppi letterali compresi tra il primo e l'ultimo termine. Come faccio?

La **regola** dice:

La potenza n-esima (cioè con *n* = numero della riga, ovvero al grado richiesto, nel nostro esempio è 5) **di un binomio a+b è un polinomio di grado n completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, che ha come coefficienti i numeri della n-esima riga del triangolo di Tartaglia.**

Quindi basta far decrescere i coefficienti di a, a partire da 5 e contemporaneamente far crescere i coefficienti di b, per ottenere le potenze cercate:

$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Notate che la somma degli esponenti di ogni monomio è sempre uguale a 5.

magico, vero? ☺

Tartaglia: chi era costui?

Visto che si è dato tanto da fare per semplificarci la vita e visto che capita a qualcuno di chiedersi se i matematici non avessero niente di meglio da fare che creare regole da imparare, almeno Chiediamoci chi era Tartaglia!
(volere è potere…)

“**Niccolò Tartaglia** (soprannome di **Niccolò Fontana**; Brescia, 1499 circa – Venezia, 13 dicembre 1557) è stato un matematico italiano, il cui nome è legato al noto triangolo

Nacque da una famiglia poverissima. Durante la presa di Brescia da parte dei francesi nel 1512 il padre fu ucciso e lui stesso ferito alla mandibola e al palato. Dato per morto, sopravvisse grazie alle cure della madre, ma gli rimase una evidente difficoltà ad articolare le parole. Per questo ebbe il soprannome "Tartaglia" che accettò e lui stesso utilizzò tutta la vita per firmare le sue opere. Non poté frequentare alcuna scuola da giovane ed era molto fiero di essere autodidatta. Nei suoi scritti, si vanta infatti di essere andato a scuola di scrittura solo per 15 giorni, all'età di 14 anni. Grazie alla sua abilità, poté comunque guadagnarsi da vivere a Verona risolvendo l'equazione cubica o equazione di terzo grado. In realtà la formula era stata trovata, ma non pubblicata, da Scipione Dal Ferro nei primi del 1500, e fu nuovamente inventata dal Tartaglia una ventina di anni dopo, mentre sullo stesso problema lavoravano anche il professore Gerolamo Cardano e al suo discepolo Ludovico Ferrari più o meno nello stesso periodo. A Tartaglia dobbiamo tra l'altro la prima traduzione italiana degli Elementi di Euclide. In un trattato Quesiti e inventioni diverse si interessa anche di balistica e di fortificazioni.” *(tratto da Wikipedia)*

Divisione di un polinomio per un monomio e divisione tra due polinomi

Dopo l'operazione di elevamento a potenza, dobbiamo parlare della divisione.

- La **divisione** tra un polinomio ed un monomio si esegue dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio. Se il termine è divisibile, si effettua la divisione, altrimenti la divisione resta scritta in forma di frazione.

es. $(2ab + 3ab^2c + d) : ab = 2 + 3bc + \frac{d}{ab}$

La **divisione tra due polinomi** si effettua in modo simile ala divisione tra numeri.

Vediamo il procedimento attraverso un esempio alla pagina successiva.

- Ricordate che un numero diviso un altro numero è uguale al risultato (il quoziente) più il resto, per cui un polinomio a(x) diviso un polinomio b(x), se ha resto, darà risultato:

a(x) = q(x) · b(x) + r(x)

- Cioè il polinomio da dividere è uguale al polinomio divisore b(x) moltiplicato il polinomio risultato, cioè il quoziente q(x), più l'eventuale resto (che sarà un monomio o un polinomio) r(x)

Divisione tra due polinomi, esempio

Dividiamo il polinomio di quarto grado $4x^4 + 12x^2 – 10x^3$ $-7x + 1$ per il polinomio di secondo grado $2x^2 + x + 1$

Si ordinano i polinomi secondo le potenze decrescenti di x e si dispongono per la divisione. Poi si divide il primo termine $4x^4$ per il primo termine $2x^2$ dell'altro polinomio e si ottiene il primo termine del risultato:

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 7x + 1 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
 & 2x^2
\end{array}$$

Ora si moltiplica il risultato ottenuto ($2x^2$) per il polinomio $2x^2 + x + 1$ e si scrive il risultato, cambiato di segno, sotto il polinomio che stiamo dividendo, mettendo in colonna i termini simili, e si fa la sottrazione.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 7x + 1 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^4 - 2x^3 - \ 2x^2 & 2x^2 \\
\qquad -12x^3 + 10x^2 - 7x + 1 &
\end{array}$$

Ora si divide il primo termine di quello che abbiamo ottenuto ($-12x^3$) sempre per $2z^2$ e otteniamo $-6x$, che è il secondo termine del risultato. Si fa poi come per la riga precedente:

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 7x + 1 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^4 - 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 6x \\
\qquad -12x^3 + 10x^2 - 7x + 1 & \\
\qquad\quad 12x^3 + \ 6x^2 \ + 6x & \\
\qquad\quad 16x^2 - \ x \ + 1 &
\end{array}$$

Ora si divide il primo termine ottenuto ($16x^2$) sempre per $2x^2$ e si ottiene 8. poi si ripete la procedura precedente:

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 7x + 1 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^4 - 2x^3 - \ 2x^2 & 2x^2 - 6x + 8 \\
\qquad -12x^3 + 10x^2 - 7x + 1 & \\
\qquad\quad 12x^3 + \ 6x^2 \ + 6x & \\
\qquad\quad 16x^2 - x \ + 1 & \\
\qquad -\ 16x^2 - 8x - 8 & \\
\end{array}$$

$- 9x - 7$ che non è più divisibile per $2x^2$, per cui ci fermiamo qui. Il risultato allora è:

$$(4x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 7x + 1) = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - 6x + 8) + (- 9x - 7)$$

Divisione: regola di Ruffini

Se il polinomio divisore ha la forma x + k (con k costante, cioè un numero) si può utilizzare la regola di Ruffini.

Vediamo anche questo procedimento con un esempio, ed eseguiamo la divisione di $2x^4 – 5x^3 - 3x + 2$ per il polinomio $x – 1$

Si scrive il primo polinomio ordinato secondo le potenze descrescenti di x e se qualche potenza di x manca (nel nostro caso la x^2) si mette lo 0): $2x^4 – 5x^3 + 0x^2 - 3x + 2$

Si fa uno schema come quello qui sotto, in cui metto nella prima riga tutti i coefficienti della x e il termine noto, mentre in basso a sinistra metto il termine noto del divisore:

Si abbassa il primo coefficiente (2) e si moltiplica 1 per 2 e si dispone il risultato in colonna, cotto il -5:

	2	- 5	0	- 3	2
		2			
1	2				

Si sommano (somma algebrica) -5 e -2 (si ottiene -3). A questo punto si moltiplica 1 per -3 e si mette il risultato (-3) in colonna, sotto allo 0.

	2	- 5	0	- 3	2
		2	-3		
1	2	- 3			

Si continua così fino ad arrivare ad avere:

	2	- 5	0	- 3	2
		2	-3	- 3	-6
1	2	- 3	-3	- 6	-4

I primo quattro numeri sono i coefficienti del polinomio risultato e quello più a destra (il -4) è il resto. La soluzione è: $(2x^4 – 5x^3 + 0x^2 - 3x + 2)=(2x^3 – 3x^2 - 3x - 6)\cdot(x – 1) - 4$

Ruffini

Visto che abbiamo parlato di Tartaglia, vogliamo dimenticare Ruffini????
Non sia mai detto!

*” **Paolo Ruffini** (Valentano, 22 settembre 1765 – Modena, 9 maggio 1822) è stato un matematico italiano.*

Il 9 giugno 1788 si laureò in filosofia, medicina e chirurgia, e subito dopo in matematica, ottenendo la cattedra di Analisi Matematica nell'Università di Modena, per poi passare alla chiusura dell'ateneo alla Scuola di Artiglieria e Genio dell'Accademia Militare di Modena. Nel 1814, alla riapertura dell'Università modenese, fu nominato rettore ma continuò a dedicarsi all'insegnamento tenendo lezioni di matematica applicata, medicina e clinica medica. Durante l'epidemia di tifo del 1817 si ammalò curando i pazienti. Nel 1819, nonostante un parziale recupero, dovette lasciare la cattedra di clinica medica.

Il suo nome è legato al teorema di Ruffini-Abel, dimostrazione parziale della irresolubilità algebrica delle equazioni di grado superiore al quarto, tramite la teoria dei gruppi, e alla regola di scomposizione dei polinomi.

In campo filosofico, cercò di dimostrare l'immaterialità dell'anima.” (tratto da Wikipedia)

Il teorema del resto

Vi sono due teoremi che ci aiutano a determinare la divisibilità di un polinomio ed il valore di un eventuale resto.

Teorema del resto

- Il resto della divisione di un polinomio $p(x)$ per un binomio $x – k$ è uguale al valore che $p(x)$ assume per $x = k$ (cioè se sostituiamo il valore di k alla x nel polinomio).

Teorema di Ruffini

- Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $p(x)$ sia divisibile per il binomio $x-k$ è che risulti $p(k) = 0$.