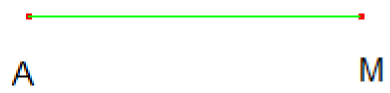
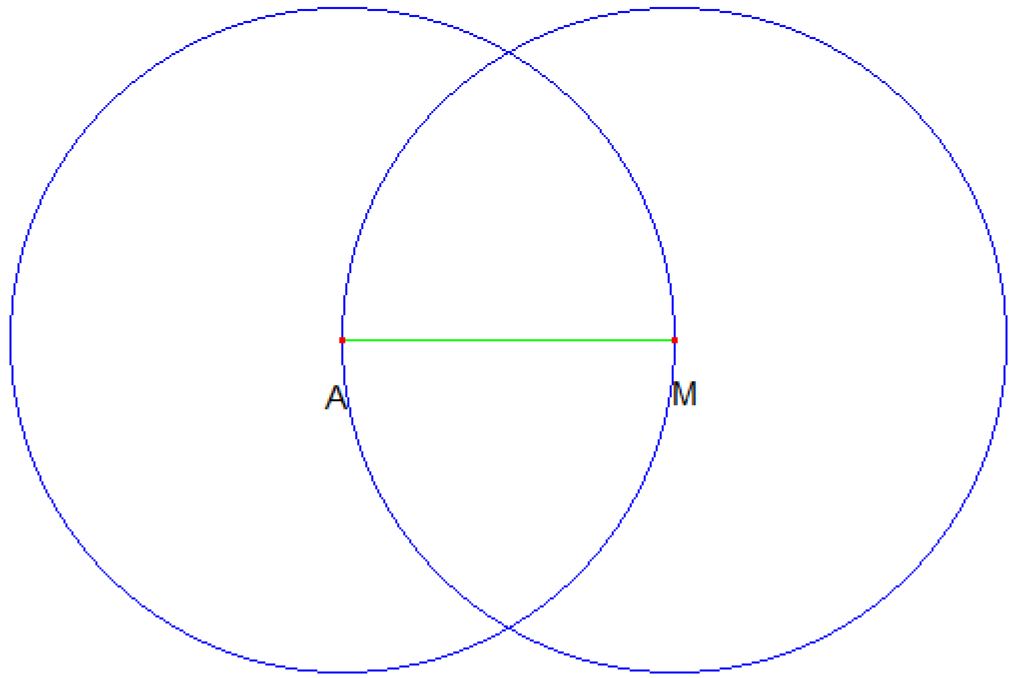
Problema del costruire

“Costruire un triangolo rettangolo in cui un cateto è la metà dell’ipotenusa”.

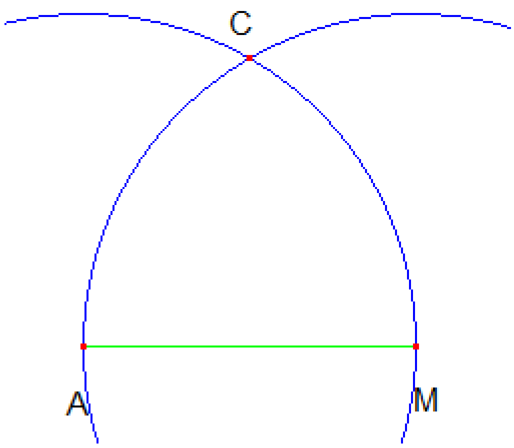
Il problema sarebbe risolto se si costruisse un triangolo equilatero di lato congruente alla metà dell’ipotenusa. Per far ciò basterà seguire i passi della costruzione euclidea del triangolo equilatero. Con l’utilizzo del software didattico *cabri* si tracci un segmento AM



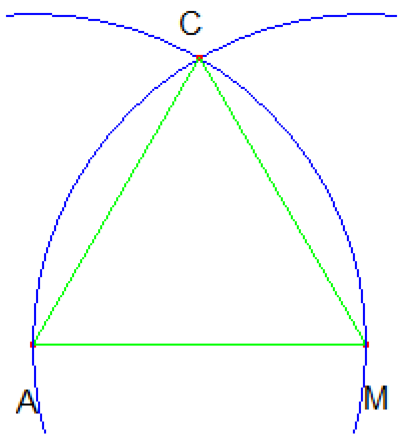
Quindi si traccino la circonferenza di centro A e raggio AM e quella di centro M e stesso raggio



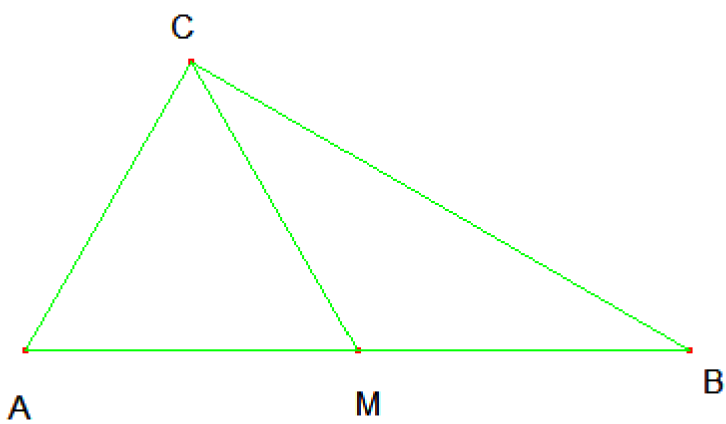
Si consideri uno dei punti di intersezione tra le circonferenze, per esempio quello che sta al di sopra di AM e lo si chiami C



congiungendo C con A, e poi congiungendo C con M si ottiene un triangolo equilatero ACM



Prolungando AM fino ad incontrare una delle due circonferenze, per esempio la seconda, in un punto B e congiungendo C con B si ottiene il triangolo rettangolo cercato nel quale, per la costruzione eseguita, si ha inoltre che la mediana CM è congruente ad AC.



Problema del dimostrare

"In un triangolo rettangolo in cui un cateto è la metà dell'ipotenusa la mediana e l'altezza relativa all'ipotenusa, insieme, dividono l'angolo retto in tre parti congruenti".

Ipotesi

1. ACB triangolo rettangolo in C (quindi di ipotenusa AB)
2. AC $\cong \frac{1}{2}$AB
3. CH altezza relativa all'ipotenusa
4. CM mediana di AB

Tesi $A\hat{C}H \cong H\hat{C}M \cong M\hat{C}B \cong \frac{1}{3}\ A\hat{C}B$

Le incognite sono gli angoli $A\hat{C}H$, $H\hat{C}M$, $M\hat{C}B$

Il legame tra le incognite e i dati è la tesi $A\hat{C}H \cong\ H\hat{C}M \cong\ M\hat{C}B \cong\ \frac{1}{3}$ $A\hat{C}B$ ovvero ciascuno congruente a 30°.

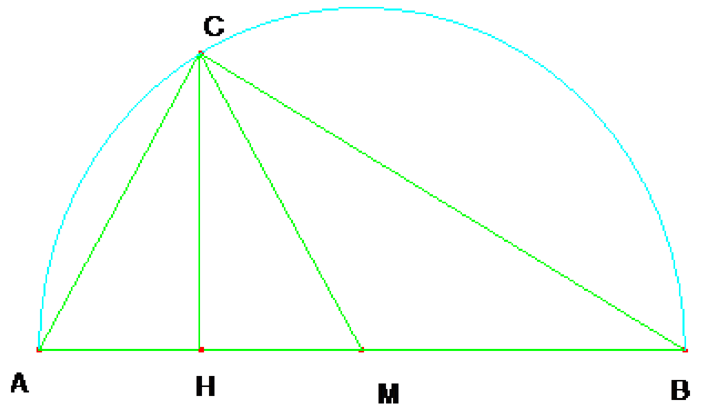
OSSERVAZIONE:

Per dimostrare la tesi basterà dimostrare che ACM è un triangolo equilatero.

In tal caso infatti si avrà che in particolare $A\hat{C}M$ è un angolo di 60°, ma $A\hat{C}M$ è il complementare di $A\hat{C}B$ e quindi $A\hat{C}B$ è congruente a 30° , inoltre ricordando che "In un triangolo equilatero altezza, mediana e bisettrice coincidono" essendo CH altezza del triangolo ACM (per definizione di altezza e per l'ipotesi 3) allora è anche bisettrice e dimezza l'angolo $A\hat{C}M$ per cui si ha la tesi.

I METODO

Per un teorema sui triangoli inscrittibili "Un triangolo rettangolo si può inscrivere in una semicirconferenza con il diametro coincidente con l'ipotenusa" come in figura:



Si ha:

M è il centro della semicirconferenza

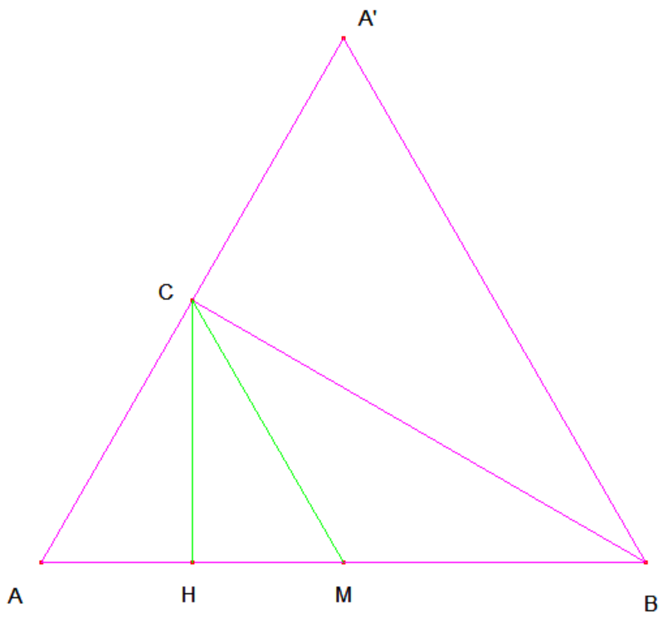
AM, MB, CM sono congruenti in quanto raggi della circonferenza;

AC è congruente ad AM per l'ipotesi 2

Allora ACM è un triangolo equilatero da cui segue la tesi. (C.V.D.)

II METODO

Costruisco il simmetrico di ACB rispetto al cateto BC individuando il triangolo ABA′.



- ABA′ è equilatero infatti
- A′B $\cong$ AB per costruzione;
- AA′ $\cong$ AB perché CA′ $\cong$ AC per costruzione e AC $\cong \frac{1}{2}$ AB per l'ipotesi 2;

Inoltre ABA′ e ACM sono triangoli simili per il criterio di similitudine LAL infatti:

- $C\hat{A}M$ è in comune
- AC $\cong \frac{1}{2}$ AA′ per costruzione
- AM $\cong \frac{1}{2}$ AB per l'ipotesi 4

Quindi ACM è un triangolo equilatero da cui come visto sopra deriva la tesi. (C.V.D.)