

Parte Sesta

Trasformazioni isometriche

In questa sezione di programma di matematica parliamo della geometria delle trasformazioni che studia le figure geometriche soggette a movimenti.

Tali movimenti, a seconda della loro natura, modificano le caratteristiche di forma, grandezza o posizione nel piano o nello spazio.

Tutto ciò si collega in modo naturale alle esperienze spaziali del bambino che vive in un mondo di oggetti visti da prospettive mutevoli, riflessi e traslati, su piani in continua trasformazione.



Alcuni matematici dell'Ottocento scoprirono che era possibile costruire diversi tipi di geometrie accettando o negando uno o più assiomi euclidei e fissando l'attenzione sulle proprietà delle figure non più viste nella loro staticità, ma considerate nella possibilità di mutarsi l'una nell'altra mediante trasformazioni continue: *le trasformazioni geometriche.*

In generale per trasformazione geometrica intendiamo un qualsiasi procedimento che permette di ottenere da una figura data F un'altra F' i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con quella data.

È una trasformazione geometrica uno spostamento, un rimpicciolimento o, in generale, una deformazione.



La congruenza è una particolare trasformazione geometrica che **non varia la forma e le dimensioni delle figure ma ne varia la posizione.**



Tutte le trasformazioni geometriche che, come la congruenza, non variano la forma e le dimensioni delle figure, prendono il nome di **trasformazioni isometriche** o **isometrie** (dal greco *iso*, "uguale" e *metron*, "misura")

Le trasformazioni isometriche che variano soltanto la posizione di una figura sono **movimenti rigidi** e possono essere:

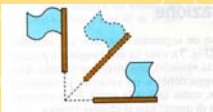
•Traslazioni

l'immagine viene trascinata nel piano in cui si trova



•Rotazioni

l'immagine viene fatta girare attorno a un punto mantenendola sullo stesso piano



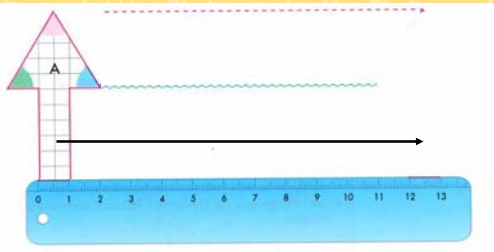
•Simmetrie

l'immagine viene ribaltata, facendola uscire dal piano in cui giace per farvela tornare capovolta.



La traslazione

Si dice **traslazione** il movimento rigido individuato da un vettore che ne stabilisce **modulo, direzione e verso**.



10

L'immagine si è spostata secondo le direzioni indicate dalle frecce che indicano:



▪ la **direzione** dello spostamento (orizzontale, verticale, obliquo);

▪ il **verso** dello spostamento (da sinistra a destra, da sinistra in basso a destra in alto);

▪ la **lunghezza** dello spostamento (possiamo misurare il percorso fatto).

11

Ogni traslazione è quindi caratterizzata da tre elementi:
lunghezza-direzione-verso

Questi elementi si rappresentano con una freccia chiamata **vettore**.



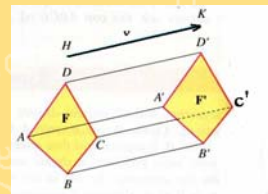
Un vettore indica:

- la direzione della traslazione, con la retta a cui appartiene;
- il verso della traslazione con la punta della freccia;
- l'ampiezza della traslazione con la lunghezza del segmento.

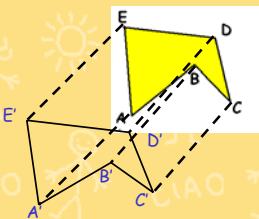
12

Per costruire dalla figura F la figura F', si conducono dai vertici A, B, C, D i segmenti AA', BB', CC', DD' congruenti e paralleli al vettore HK, e nel suo stesso verso.

Congiungendo i punti A', B', C', D' si ottiene la figura F', traslata rispetto alla figura F secondo il vettore v

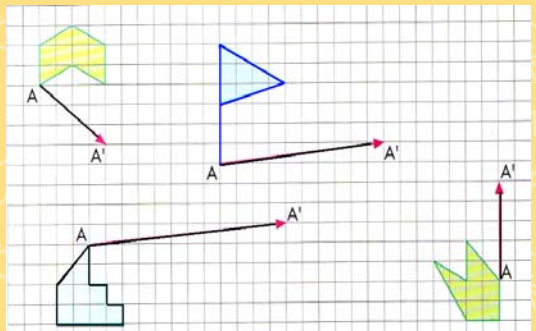


13

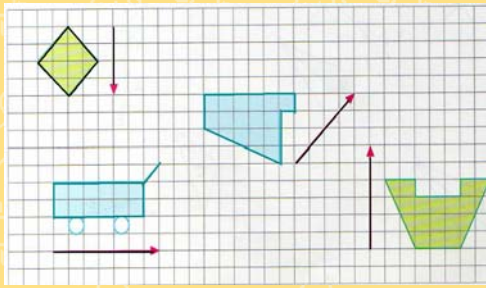


14

Utilizza i quadretti per costruire le figure traslate dal punto A al punto A'.



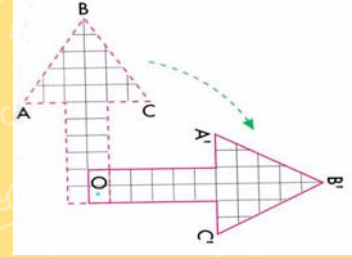
Trasla le figure secondo le indicazioni dei vettori



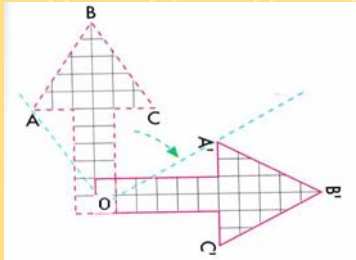
16

La rotazione

Si dice **rotazione** il movimento rigido individuato da un punto fisso O , detto **centro di rotazione**, e da un **angolo orientato** che stabilisce l'**ampiezza** e il **verso** di spostamento nel piano.



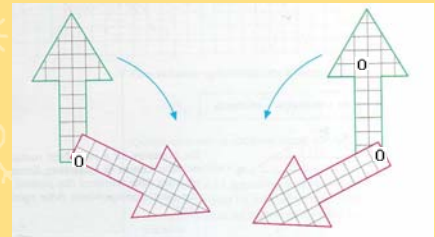
17



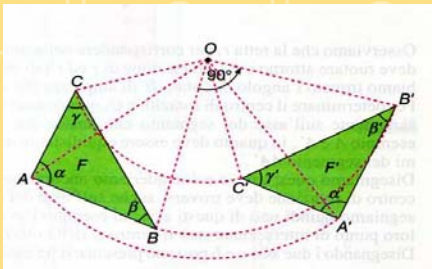
Ogni coppia di semirette che congiunge il centro di rotazione con i punti corrispondenti, formano angoli uguali la cui ampiezza indica l'**ampiezza della rotazione**.

18

rotazione oraria ed antioraria

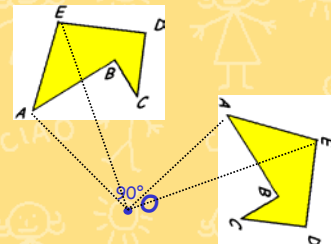


19



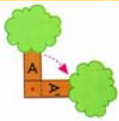
Fissato l'angolo α e il centro di rotazione, per disegnare in F' il punto A' , corrispondente del punto A nella figura F , si punta il compasso in O e con apertura uguale al segmento OA si descrive in senso orario (o antiorario) un arco corrispondente all'ampiezza dell'angolo α .

20



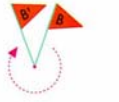
21

Indica se l'enunciato è vero o falso



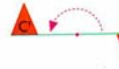
ha ruotato di 90° in senso orario

V F



ha ruotato di 320° in senso orario

V F



ha ruotato di 180° in senso antiorario

V F

22



ha ruotato di 270° in senso orario

V F

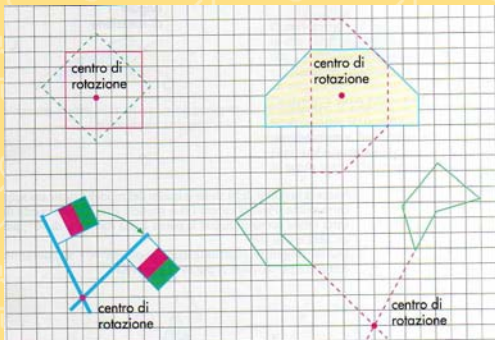


ha ruotato di 90° in senso antiorario

V F

23

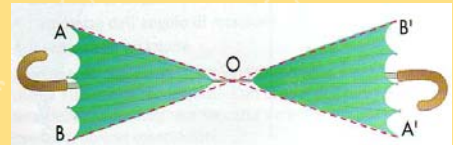
Il centro di rotazione può essere anche esterno alla figura



24

La simmetria centrale

Fra le rotazioni possibili ve ne è una che ha particolari caratteristiche e che viene chiamata **simmetria centrale**. La rotazione è di 180° .

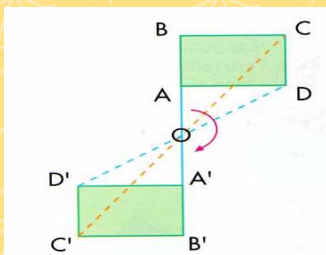


L'ombrellino ha subito una rotazione di 180°

25

Le coppie di punti corrispondenti sono allineate con il centro di rotazione O e sono da esso equidistanti.

Per questa proprietà la rotazione di 180° si chiama **simmetria centrale**



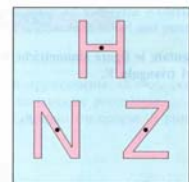
26

Una figura si dice dotata di centro di simmetria o di simmetria centrale se esiste un punto (detto centro di simmetria) rispetto al quale i punti della figura sono a due a due simmetrici.

Le simmetrie centrali sono molto diffuse in natura, nell'arte, negli oggetti di uso comune



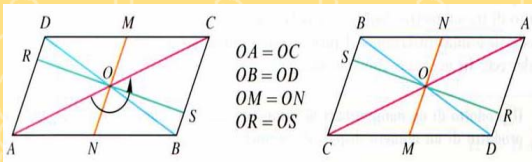
Sezione di un'arancia con centro di simmetria



Caratteri tipografici dotati di centro di simmetria

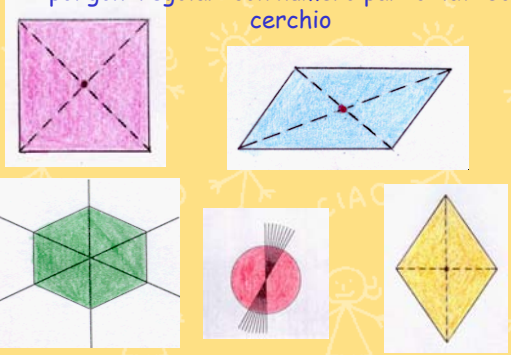
27

Il centro di simmetria di ogni parallelogramma è il punto di intersezione delle diagonali. Dopo una rotazione di un angolo piatto, la figura si sovrappone a se stessa, mutando evidentemente le posizioni dei vertici.



$$\begin{aligned} OA &= OC \\ OB &= OD \\ OM &= ON \\ OR &= OS \end{aligned}$$

Sono dotati di centro di simmetria tutti i quadrilateri che hanno diagonali che si bisecano, i poligoni regolari con numero pari di lati ed il cerchio

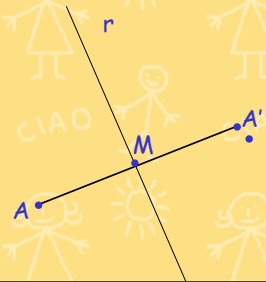


La simmetria assiale

Si definisce simmetria assiale la trasformazione che fa corrispondere ad ogni punto del piano il suo simmetrico rispetto ad un asse, detto asse di simmetria.



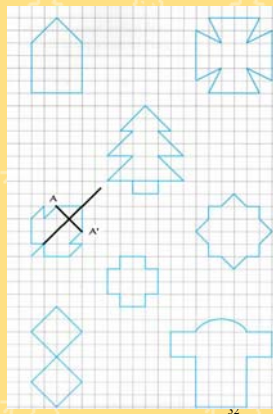
Due punti A ed A' si dicono simmetrici rispetto ad una retta r se tale retta è perpendicolare al segmento che unisce i due punti nel suo punto medio.



Rappresentando figure simmetriche sulla carta quadrettata si avrà una più precisa definizione delle caratteristiche della simmetria:

I punti simmetrici sono equidistanti dall'asse di simmetria

La retta che congiunge due punti simmetrici è perpendicolare all'asse di simmetria



Simmetrie con le lettere

0 assi di simmetria	F, G, L, N, P, Q, R, S, J, Z
1 asse di simmetria orizzontale	B, C, D, E, K
1 asse di simmetria verticale	A, M, T, U, V, W, Y
2 assi di simmetria	H, I, O, X

Simmetrie con le frasi

OTTO AMA AVA | AVA AMA OTTO

Il concetto di simmetria ha una grande rilevanza culturale e non è solo legato alla matematica: esso pervade la realtà naturale ed anche le dimensioni cognitive, estetiche ed emotive dell'uomo. E' strano come dal caos possa avere origine una armonia geometrica così particolare. L'uomo, infatti, vive in un mondo dove animali, piante, minerali sembrano ripetersi ad ogni istante che le cose belle della natura hanno elementi di regolarità, hanno elementi simmetrici.

34

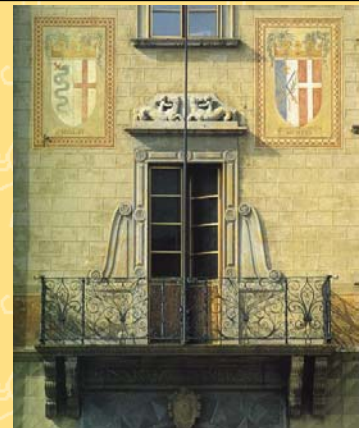
Anche il corpo umano presenta molti elementi di simmetria. Le mani sono uguali, ma simmetriche e per farle combaciare bisogna ribaltare l'una sull'altra; per questo non possiamo indossare il guanto destro al posto del sinistro e viceversa.

Fin dai tempi più remoti l'uomo ha espresso nell'arte quello che per lui voleva dire armonia, ha creato nella pittura, nella scultura, nella architettura, figure geometriche aventi elementi di simmetria.

35



36



37

Il Campidoglio, sede del governo cittadino, è il centro ideale di Roma. La piazza di forma trapezoidale fu progettata da Michelangelo nel 1536. I due edifici laterali il palazzo dei Conservatori e il Museo Capitolino sono uguali e simmetrici.



38



39

Asse di simmetria

Se i vertici $A B C D$ si susseguono in senso antiorario, i loro corrispondenti $A' B' C' D'$ si susseguono in senso orario e quindi, in una simmetria assiale l'ordinamento dei punti cambia;

Costruzione della figura F' corrispondente della figura F nella simmetria assiale di asse r

40

Esercizio Caterina

41

Credi che se ti metti davanti allo specchio la tua immagine è perfettamente identica a te?
Sembra così, ma in realtà gli altri non ti vedono come ti vedi nello specchio.

Chiudi l'occhio destro. La tua immagine nello specchio chiude l'occhio! Saluta con la mano sinistra. Nello specchio l'immagine saluta con la mano! Pettinati con la mano destra. La tua immagine speculare si pettina con la mano

42

La relazione **sopra e sotto** della figura reale **resta immutata** nell'immagine riflessa
Si conservano le relazioni vicino-lontano e quelle di inclusione
Cambia la relazione **destra-sinistra** che risulta capovolta (ad esempio il braccio destro di una persona diventa il braccio sinistro nella sua immagine riflessa).

43

Due figure che si corrispondono in una **traslazione** o in una **rotazione** sono **direttamente congruenti**
Le figure si possono sovrapporre in modo da coincidere mantenendole nel piano in cui si trovano.

Due figure che si corrispondono in una **simmetria assiale** sono **inversamente congruenti**.
Per sovrapporre le due figure non basta traslare e ruotare, ma bisogna sollevarne una, cioè uscire dal piano in cui si trova, ed eseguire un **ribaltamento**.

44

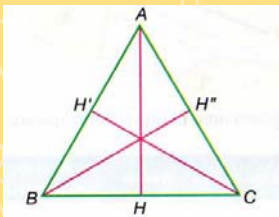
Applicazioni della simmetria assiale

In un triangolo isoscele, bisettrice, mediana, altezza e asse relativi alla base coincidono in un unico segmento che è asse di simmetria del triangolo isoscele

45

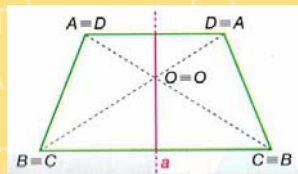
In un triangolo equilatero bisettrice, mediana, altezza e asse relativi ai tre lati coincidono in tre unici segmenti.

Questi tre segmenti sono assi di simmetria del triangolo equilatero.



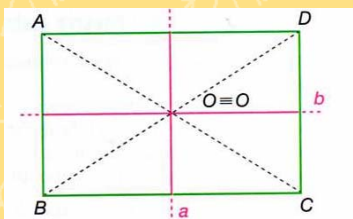
46

In un trapezio isoscele l'asse di simmetria è la retta a perpendicolare alle due basi e passante per il punto di incontro delle diagonali.



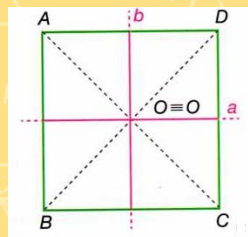
47

In un rettangolo sono assi di simmetria le due rette a e b rispettivamente perpendicolari alla base e all'altezza, passanti per il punto di incontro delle diagonali.



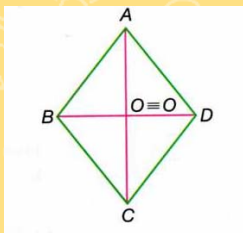
48

In un quadrato sono assi di simmetria le due rette a e b perpendicolari ai lati, passanti per il punto di incontro delle diagonali. Sono assi di simmetria anche le due diagonali.



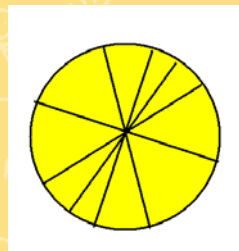
49

In un rombo sono assi di simmetria le due diagonali.



50

In una circonferenza ogni diametro è asse di simmetria.



51

In un poligono regolare sono assi di simmetria gli assi di ciascun lato e la retta che congiunge due vertici diametralmente opposti nella circonferenza circoscritta al poligono.

