Lezione 1

Gli Insiemi

La nozione di insieme viene spesso utilizzata nella vita di tutti i giorni;

si parla dell'insieme:

- degli iscritti ad un corso di laurea
- delle stelle in cielo
- dei punti di un piano

Un insieme rappresenta un raggruppamento di uno o più oggetti.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole A, B, C, …

Mentre gli elementi che fanno parte degli insiemi si indicano con le lettere minuscole a,b,c, …

Per indicare l'appartenenza o non appartenenza di un elemento ad un insieme A si utilizza la seguente simbologia

$$a \in A \qquad a \notin A$$

Per descrivere e precisare quali siano gli elementi di un insieme si possono utilizzare varie rappresentazioni:

- rappresentazione tabulare
- rappresentazione grafica
- rappresentazione caratteristica

Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare di un insieme consiste nello scriverne, quando è possibile, tutti gli elementi entro parentesi graffe.

Esempio 1. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1100 ha la seguente rappresentazione tabulare

$$A = \{1, 0\} \quad \text{e non} \quad A = \{1, 1, 0, 0\}$$

Esempio 2. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione tabulare:

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

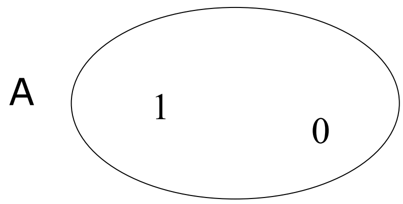
Un insieme si dice finito quando è possibile scriverne la rappresentazione tabulare e tale scrittura ha termine.

In caso contrario si dice infinito.

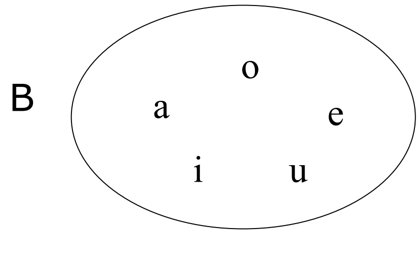
Rappresentazione grafica

La rappresentazione grafica di un insieme consiste nel racchiudere i suoi elementi in una linea chiusa

<u>Esempio 1</u>. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1100 ha la seguente rappresentazione grafica



<u>Esempio 2</u>. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:



Rappresentazione caratteristica

La rappresentazione caratteristica di un insieme consiste nel caratterizzare i suoi elementi con una proprietà comune detta appunto proprietà caratteristica.

Esempio 1. L’insieme A costituito dalle cifre del numero 1100 ha la seguente rappresentazione caratteristica:

$$A = \{\text{numeri interi compresi tra } 0 \text{ e } 2\}$$

o equivalentemente

$$A = \{x : \text{numeri interi e } 0 < x < 2\}$$

Esempio 2. L’insieme B formato dalle vocali dell’alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:

$$B = \{\text{vocali dell'alfabeto italiano}\}$$

o equivalentemente

$$B = \{x : x \text{ vocale dell'alfabeto italiano}\}$$

DEFINIZIONI

- Si definisce insieme vuoto l'insieme privo di elementi che si indica col simbolo $\varnothing$

- Due insiemi A e B si dicono uguali quando sono costituti dagli stessi elementi e si scrive

$$A=B$$

cioè ogni elemento dell'uno è anche un elemento dell'altro. In caso contrario, si dice che gli insiemi A e B sono diversi e si scrive

$$A \neq B$$

- Se nessun elemento di A sta in B, si dice che A e B sono disgiunti.

<u>Esempio 1</u>. Se

$$A=\{r,t\} \quad \text{e} \quad B=\{t,r\} \text{ allora } A=B$$

<u>Esempio 2</u>. Se

$$A=\{a,b,c\} \quad \text{e} \quad B=\{a,d,e\} \text{ allora } A \neq B$$

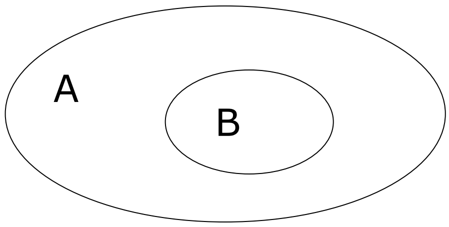
<u>Esempio 2</u>. Se

$$A=\{a,b,c\} \quad \text{e} \quad B=\{m,n,t\} \text{ allora } A \text{ e } B \text{ disgiunti}$$

• Si dice che B è un sottoinsieme dell'insieme A se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A e si scrive simbolicamente:

$$A \supseteq B \text{ oppure } B \subseteq A$$

Rappresentazione grafica



In particolare:

• tra i sottoinsiemi di un generico insieme A vi è A stesso (ogni elemento di A appartiene ad A), cioè:

$$A \supseteq A \text{ oppure } A \subseteq A$$

• si conviene di considerare l'insieme vuoto come sottoinsieme di ogni generico insieme

$$\Downarrow$$

Ogni insieme possiede sicuramente due sottoinsiemi: se stesso e l'insieme vuoto.

Si definisce sottoinsieme proprio di un insieme A ogni suo sottoinsieme non vuoto e distinto da A

<u>Esempio 1</u>. Se

$$B = \{a, d, b\} \text{ e } A = \{a, b, c, d\} \Rightarrow B \subseteq A$$

<u>Esempio 2</u>. Se

$$B = \{1,2,3,4,5\} \text{ e } A = \{2,3\} \Rightarrow A \subseteq B$$

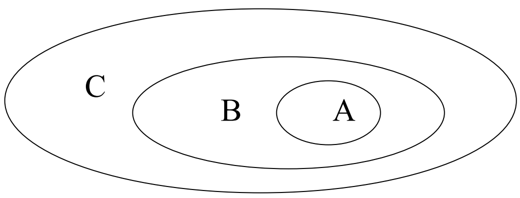
<u>Osservazioni</u>:

• ovviamente due insiemi A e B sono uguali se e solo se

$$B \subseteq A \text{ e } A \subseteq B$$

• è facile provare che se

$$A \subseteq B \text{ e } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$



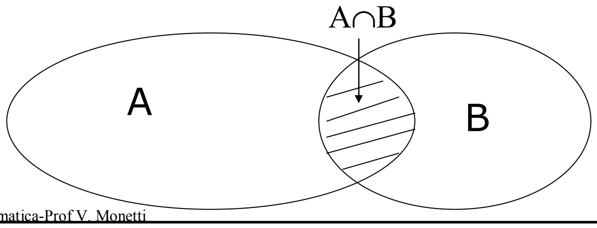
Operazioni tra gli insiemi

- Def. Si definisce intersezione tra due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B e si indica col simbolo

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}$$

(analogamente si definisce l'intersezione tra tre o più insiemi)

Graficamente l'intersezione tra A e B si raffigura come segue

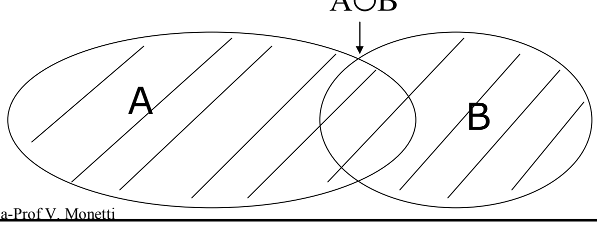


Def. Si definisce unione tra due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi che appartengono almeno ad A o B e si indica col simbolo

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$$

(analogamente si definisce l'unione tra tre o più insiemi)

Graficamente l'unione tra A e B si raffigura come segue



Ovviamente:

- se A e B non hanno elementi in comune si ha che $A \cap B = \varnothing$

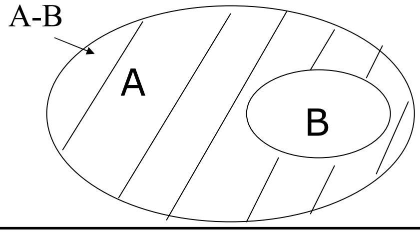
- $A \bigcup B \supseteq A$ e $A \bigcup B \supseteq B$

- $A \bigcap B \subseteq A$ e $A \bigcap B \subseteq B$

Def. Si definisce differenza complementare tra un insieme A ed un suo sottoinsieme B, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A e non appartengono a B e si indica col simbolo

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Graficamente la differenza complementare tra A ed il suo sottoinsieme B si raffigura come segue



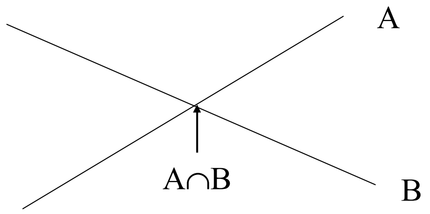
- Esempio 1. Se

$$A=\{a,b,c,d\} \text{ e } B=\{a,d,f\} \Rightarrow A\cap B=\{a,d\}$$
$$A\cup B=\{a,b,c,d,f\}$$

- Esempio 2. Se

$$A=\{1,2,3,4\} \text{ e } B=\{1,3,5\} \Rightarrow A\cap B=\{1,3\}$$
$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$$

- Esempio 3. Se A e B sono due rette non parallele di uno stesso piano, allora A ∩ B è l'insieme formato dal loro punto di intersezione



Oss. Se A e B fossero state due rette parallele allora A ∩ B =∅.

- Esempio 4. Se

$$A=\{1,2,3,4\} \text{ e } B=\{1,3\} \Rightarrow A-B=\{2,4\}$$

I numeri reali

Il metodo comunemente usato in matematica consiste nel precisare senza ambiguità i presupposti, da non cambiare durante l'elaborazione della teoria, e nel dedurre poi da tali presupposti il maggior numero di informazioni possibili.

$\Downarrow$

Presupposti=Regole di un gioco

In matematica tali presupposti vengono chiamati postulati o assiomi e da essi, mediante dimostrazioni, vengono dedotti i risultati o teoremi (corollari, proposizioni)

$\Downarrow$

Il nostro punto di partenza è quello di assumere, come postulato, che esista il sistema dei numeri reali

Cioè, assumiamo che esista un insieme di numeri, che chiamiamo numeri reali e che indichiamo con **R,** in cui sia possibile effettuare, con opportune regole, le quattro operazioni elementari (+,-,•,/)

Alcune fissate proprietà dei numeri reali vengono assunte come assiomi.

Tutte le altre proprietà discendono da tali assiomi

Assiomi dei numeri reali

- Assiomi relativi alle operazioni

1. Proprietà associativa
2. Proprietà commutativa
3. Proprietà distributiva
4. Esistenza degli elementi neutri: 0 e 1
5. Esistenza degli opposti: a e -a
6. Esistenza degli inversi: a e $a^{-1}=1/a$

- <u>Assiomi relativi all'ordinamento</u>

7. Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali a e b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$
8. Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a=b$

- <u>Assioma di completezza</u>

9. Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano un elemento a di A ed un elemento b di B.

   Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B.

A partire dagli assiomi dei numeri reali, possiamo affermare che apparterranno ad **R** anche i numeri risultato di operazioni tra due numeri reali

$$\Downarrow$$

In particolare, apparterranno ad **R** i numeri interi positivi: 1,2,3,4,…

Tale sottoinsieme di **R** si chiama insieme dei numeri naturali e si indica con

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$$

Analogamente indichiamo con Z il sottoinsieme di R costituito dagli elementi di N, dai loro opposti e dallo 0.

Cioè, l'insieme dei numeri interi relativi Z si indica con

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\} = \\ = \{0\} \cup \{\pm n : n \in N\}$$

I risultati della divisione m/n, con m,n numeri interi relativi ed n diverso da zero, si chiamano numeri razionali e si indicano con

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

Naturalmente risulta che

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

Essendo N, Z, Q sottoinsiemi di R, su di essi sono definite le operazioni indotte da R. Però essi non soddisfano tutti gli assiomi dei numeri reali:

- In N non esiste opposto di alcun numero
- Escluso 1, in Z non esiste inverso di alcun numero
- Q verifica tutti gli assiomi di operazione e ordinamento di R, ma non l'assioma di completezza