Insieme dei numeri razionali

Per indicare il quoziente fra due numeri n e d, si scrive una **frazione** che ha come **numeratore** il **dividendo** e per **denominatore** il **divisore** della divisione. *Qualsiasi divisione è quindi esprimibile come frazione*. Questa scrittura non ha spesso risultato nell'insieme N dei numeri naturali (l'ha solo per le frazioni apparenti) e quindi si opera un ampliamento ai **numeri frazionari** o **razionali**, l'insieme **Q**. Occorre tenere presente, inoltre, che a ogni numero razionale corrispondono tutte le frazioni appartenenti alla medesima **classe di equivalenza**.

Ogni classe di equivalenza trova precisa collocazione sulla retta dei numeri.

Una frazione si dice **frazione decimale** quando ha per denominatore una potenza di 10 ed è quindi generalizzabile nella forma: $\frac{a}{10^n}$ con $a,n \in N$ e con $a \neq 0$

*Per le frazioni che non si presentano in forma decimale, denominate **frazioni ordinarie**, possono verificarsi due casi:*

- la frazione ordinaria **è riconducibile ad una frazione decimale**, quando ridotta ai minimi termini compare nella classe di equivalenza relativa una frazione decimale:

$$E\left(\frac{4}{5}\right)=\left\{\frac{4}{5};\frac{8}{10};\frac{12}{15};\ldots\right\}$$

$$E\left(\frac{3}{2}\right)=\left\{\frac{3}{2};\frac{6}{4};\frac{9}{6};\frac{12}{8};\frac{15}{10};\frac{18}{12};\frac{21}{14};\ldots\right\}$$

- la frazione ordinaria **non è riconducibile ad una frazione decimale**

$$E\left(\frac{4}{3}\right)=\left\{\frac{4}{3};\frac{8}{6};\frac{12}{9};\frac{16}{12};\frac{20}{15};\frac{24}{18};\ldots\right\}$$

dove essendo i denominatori tutti multipli di 3 non comparirà mai la forma decimale.

$$E\left(\frac{4}{7}\right)=\left\{\frac{4}{7};\frac{8}{14};\frac{12}{21};\frac{16}{28};\ldots\right\}$$

dove essendo i denominatori tutti multipli di 7 non comparirà mai la forma decimale.

$$E\left(\frac{5}{6}\right)=\left\{\frac{5}{6};\frac{10}{12};\frac{15}{18};\frac{20}{24};\ldots\right\}$$

dove essendo i denominatori tutti multipli di 3 (6 = 2x3) non comparirà mai la forma decimale.

Quindi una frazione è riconducibile alla forma decimale quando il suo denominatore è scomponibile nei fattori 2 o 5 o entrambi. In tutti gli altri casi la frazione non è riconducibile ad una frazione decimale. Dalla scomposizione sarà facile ricondurre le frazioni alla forma decimale, quando possibile, moltiplicando per le potenze del 2 e del 5 in modo da completare quella del 10 più prossima.

La divisione

I termini della divisione si chiamano rispettivamente **dividendo** e **divisore**, il risultato si chiama **quoziente**. Il simbolo usato per la divisione è il due punti (:) ma si usa anche la barretta (/).

Quoziente esatto

Quando esiste un numero naturale che moltiplicato per il divisore da per risultato il dividendo si ha una divisione con **quoziente esatto**.

Esempio:

20	**:**	**4**	**=**	**5**
dividendo		divisore		quoziente

Quoziente approssimato e resto

Quando la divisione non è possibile perché non esiste un numero naturale che moltiplicato per il divisore dia per risultato il dividendo si ha una divisione con **quoziente approssimato** e **resto**.

Il **quoziente approssimato** è il più grande numero naturale che moltiplicato per il divisore dà come risultato un numero che non supera il dividendo.

33	**:**	**7**	**=**	**4**	resto **5**
dividendo		divisore		quoziente	

$33 : 7 = 4$ perché $7 \cdot 4 = 28$ che è il multiplo di 7 più vicino a 28 per difetto

Il **resto** è la differenza fra il dividendo e il prodotto del divisore per il quoziente.

$33 : 7 = 4$ con resto 5 perché $33 – (7 \cdot 4) = 33 – 28 = 5$

Da quanto esposto si deduce che::

quoziente x divisore + resto = dividendo

$$a : b = q \text{ con resto } r \qquad \textit{perché} \qquad b \cdot q + r = a$$

Esempio

33	**:**	**7**	**=**	**4**	resto **5**
dividendo	**:**	divisore	=	quoziente	
4	·	7	+	5	= 33
quoziente	·	divisore	+	resto	= dividendo

Le due facce del mondo di Q

Eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore di una qualsiasi frazione, non apparente (nel qual caso si ottiene un numero naturale) e ridotta ai minimi termini, si possono ottenere numeri decimali finiti o illimitati a seconda dei casi (i numeri decimali furono introdotti solo nel 1585 dal matematico belga Simon Stevin).
Per stabilire quale tipo di numero decimale risulta dall'operazione di divisione tra due numeri è sufficiente fare, come vedremo, alcune considerazioni sul solo denominatore della frazione generatrice.

Frazioni decimali danno origine a **numeri decimali finiti**; viceversa un numero decimale finito ammette una frazione generatrice decimale.
In questo caso, dati due numeri qualsiasi *a* e *b*, eseguendone la divisione nell'ordine dato si avrà, dopo aver applicato un certo numero di volte l'algoritmo di divisione, resto zero, quindi:

$q \cdot b = a$ *essendo il resto pari a 0*

Esempio: 6 : 2 = 3 resto 0, quindi 3 · 2 = 6

Esempio: 12 : 5 = 2,4 resto 0, quindi 2,4 · 5 = 12,0

Frazioni non decimali danno origine a **numeri decimali illimitati periodici** e le cifre che si ripetono costituiscono il **periodo**, mentre le cifre comprese fra la virgola e il periodo si dicono **antiperiodo**.
Se c'è l'antiperiodo il numero si dice **periodico misto** (nel numero $1{,}2\overline{43}$, per esempio, 1 è la parte intera, 2 l'antiperiodo e 43 il periodo), in caso contrario si dice **periodico semplice** (nel numero $1{,}\overline{3}$, per esempio, il numero 1 è la parte intera ed il 3 il periodo, manca l'antiperiodo).

Anche in questo caso si può risalire alla frazione generatrice con qualche semplice deduzione.
I questo caso, dati due numeri qualsiasi *a* e *b*, eseguendone la divisione nell'ordine si avrà dopo aver applicato un certo numero di volte l'algoritmo di divisione un resto che induce la ripetizione di una sequenza di una o più cifre, quindi:

$$q \cdot b + r = a$$

quoziente x divisore + resto = dividendo

Esempi:

1** : **3** = **0,3** resto 0,1, quindi **0,3** · **3** + 0,1 = **1

17** : **5** = **3** resto 2, quindi **3** · **5** + 2 = **17

Esempio 1

Sia *n/d* la frazione generatrice di $1,\overline{3}$, moltiplicando per 10 i due numeri deve essere

$$\frac{n}{d}\cdot 10 = 13,\overline{3}$$

sottraendo *n/d* (ricorda che n/d = $1,\overline{3}$) e il numero ai due termini otterremo

$$\frac{n}{d}\cdot 10 - \frac{n}{d} = 13,\overline{3} - 1,\overline{3}$$

quindi

$$\frac{n}{d}\cdot 10 - \frac{n}{d} = 12$$

da cui

$$9\cdot\frac{n}{d} = 12$$

per arrivare a

$$\frac{n}{d} = \frac{12}{9}$$

Esempio 2

Sia *n/d* la frazione generatrice di $3,\overline{12}$, moltiplicando per 100 i due numeri deve essere

$$\frac{n}{d}\cdot 100 = 312,\overline{12}$$

sottraendo *n/d* ed il numero ai due termini otterremo

$$\frac{n}{d}\cdot 100 - \frac{n}{d} = 312,\overline{12} - 3,\overline{12}$$

quindi

$$\frac{n}{d}\cdot 100 - \frac{n}{d} = 312$$

da cui

$$99\cdot\frac{n}{d} = 312$$

per arrivare a

$$\frac{n}{d} = \frac{312}{99}$$

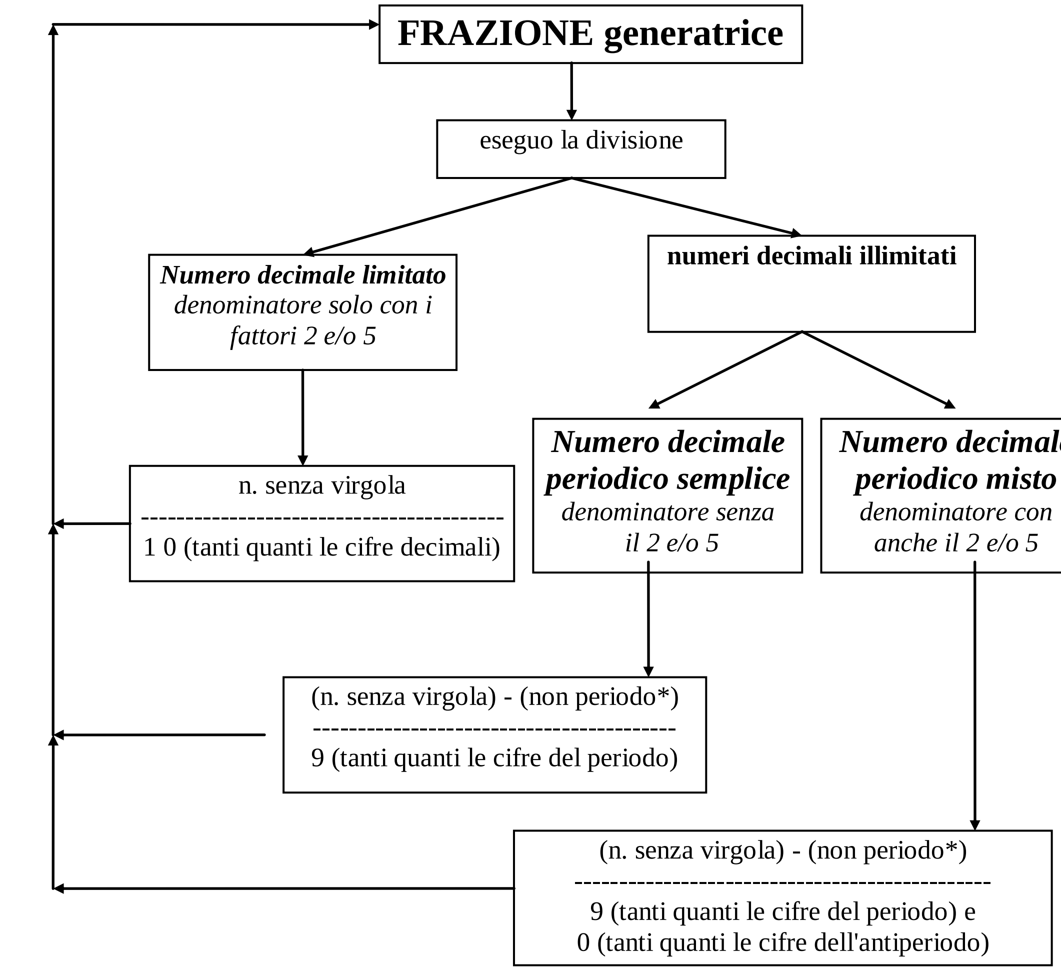
Esempio 3

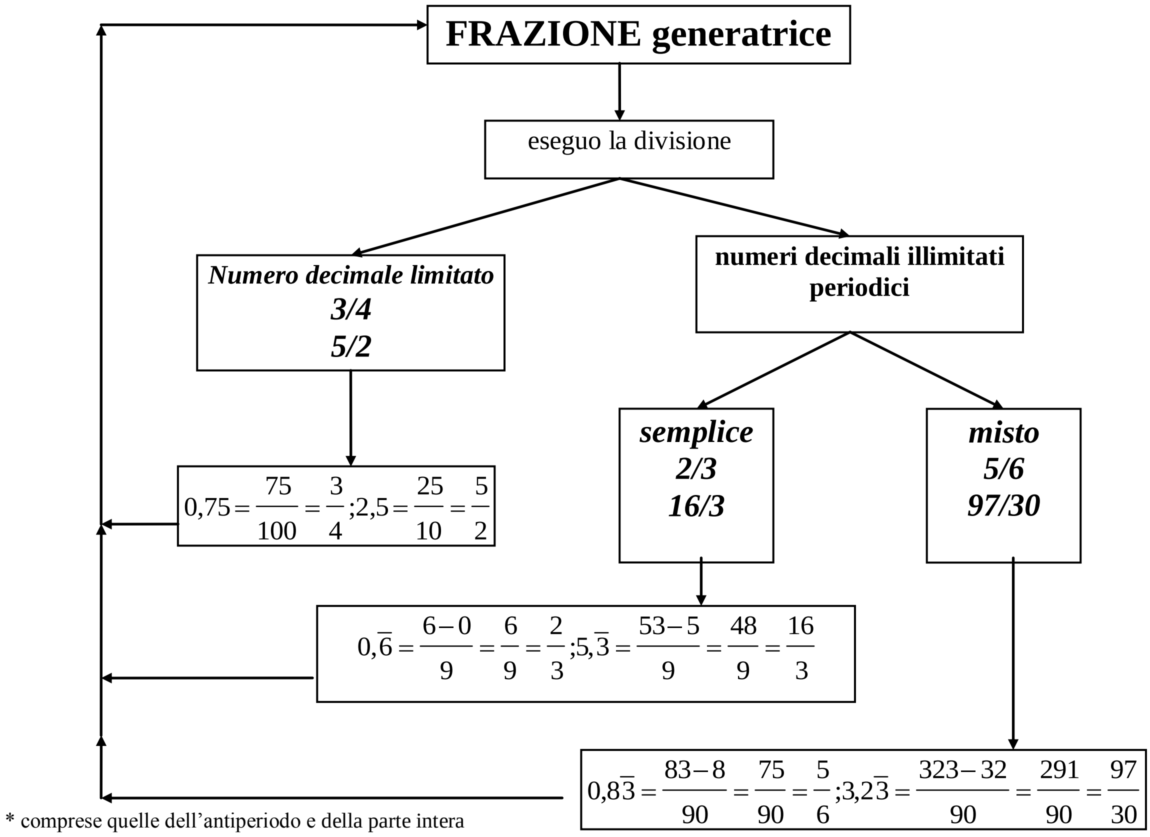
Per i numeri decimali periodici misti sarà sufficiente estendere il ragionamento fatto per quelli semplici dopo aver moltiplicato per una potenza di 10 il numero in modo da trasformarlo in uno semplice (la potenza andrà quindi al denominatore):

Sia *n/d* la frazione generatrice di $3,1\overline{2}$, moltiplicando per 10 i due numeri deve essere:

$$10 \cdot \frac{n}{d} = 31,\overline{2}$$

ed abbiamo ricondotto l'analisi al caso precedente.





* comprese quelle dell'antiperiodo e della parte intera