Le operazioni fondamentali in N
Basic Arithmetic Operations in N

In generale **una operazione è un procedimento** che a due o più numeri, dati in un certo ordine e detti **termini** dell'operazione, ne associa un altro, detto **risultato** dell'operazione..
$(a;b) \rightarrow c$ con $(a; b; c) \in N$
Quello che cambia da operazione ad operazione è il procedimento.

Ogni diversa operazione è contraddistinta da un proprio simbolo.

Sono **interne all'insieme N dei numeri naturali le operazioni il cui risultato è ancora un numero naturale**. Si dice, inoltre, che l'insieme N è chiuso per queste operazioni.

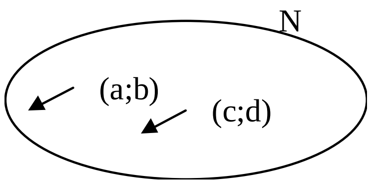


Tavola riassuntiva della nomenclatura utilizzata.

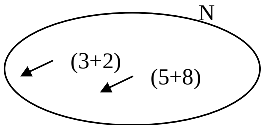
	simbolo	**termini**	**risultato**	**proprietà**
addizione	+	addendi	somma totale	commutativa associativa dissociativa
sottrazione	-	minuendo sottraendo	differenza resto	invariantiva
moltiplicazione	x · *	fattori (moltiplicando, moltiplicatore)	prodotto	commutativa associativa dissociativa distributiva
divisione	: / ÷	dividendo divisore	quoto quoziente	invariantiva distributiva
elevamento a potenza	^ **	base esponente	potenza	Non sono qui riportate per problemi di spazio le proprietà di queste operazioni.
estrazione di radice	√	indice radicando	radicale (base cercata)	
logaritmo	log ln	base potenza	logaritmo (esponente cercato)	

Le quattro operazioni fondamentali

Addizione

L'addizione è l'operazione che dati due numeri qualsiasi, detti **addendi**, ne associa un terzo, detto **somma** o totale, ottenuto contando dopo al primo addendo tante unità quante sono quelle del secondo.

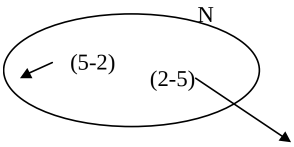
L'addizione **è interna a N**!
L'insieme N è chiuso rispetto all'addizione.



Sottrazione

La sottrazione è l'operazione che dati due numeri qualsiasi in un dato ordine (minuendo > sottraendo; altrimenti Z), detti **minuendo** e **sottraendo**, ne associa un terzo, detto **differenza** o resto, ottenuto togliendo al minuendo tante unità quante sono quelle del sottraendo.

La sottrazione **non è interna a N**!
L'insieme N non è chiuso rispetto alla sottrazione (Z).



Sottrazione con risultato in Z.
Per eseguire la sottrazione con il minuendo minore del sottraendo, si esegue la differenza dei due numeri (maggiore - minore) e si attribuisce al risultato il **segno negativo**.

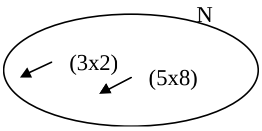
(+) 3 + (-) 8 = 3 - 8 = -5 (perché 8 - 3=5)

Moltiplicazione

La moltiplicazione è l'operazione che dati due numeri qualsiasi, detti **fattori** (o moltiplicando e moltiplicatore), ne associa un terzo, detto **prodotto**, ottenuto addizionando tante volte le unità del primo quante sono le unità del secondo.

$$2x3 = \frac{2+2+2}{3volte} = 6$$

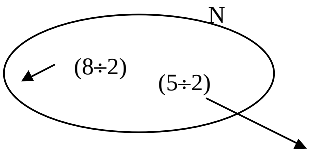
La moltiplicazione **è interna a N**!
L'insieme N è chiuso rispetto alla moltiplicazione.



Divisione

La divisione è l'operazione che dati due numeri qualsiasi in un dato ordine, detti **dividendo** e **divisore**, ne associa un terzo, detto **quoto** o **quoziente** (risultato in N e Q), ottenuto raggruppando in tante parti quante ne richiede il divisore oppure contando quante parti si possono ottenere, composte da tante unità quante ne indica il divisore.

La divisione **non è interna a N**!
L'insieme N non è chiuso rispetto alla divisione (Q).



Se un numero *a* è multiplo di un numero *b*, diverso da 0, si dice ***quoto*** *o quoziente esatto* quel numero *q* che moltiplicato per *b* da come risultato *a*. La divisione non dà resto! Quindi:

a = b x q (12:3=4 quindi 12=3x4)

Se i due numeri sono tali che *a* non sia multiplo di *b*, si dice ***quoziente*** *o quoziente approssimato* quel numero che moltiplicato per *b* dà un prodotto minore di *a*. In questo caso la divisione dà un resto *r* diverso da zero! Quindi:

a = b x q + r (11:5=2 resto 1 quindi 11=2x5+1)

Proprietà delle quattro operazioni fondamentali

Addizione commutativa
In una **addizione** cambiando l'ordine degli **addendi** la **somma** non cambia.

$$a + b = b + a \qquad \forall(a,b) \in N$$

2 + 3 = 3 + 2

Addizione associativa
Sostituendo a due o più **addendi** la loro **somma** il risultato della **addizione** non cambia

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall(a,b) \in N$$

7 + 3 + 5 = 7 + 8 = 10 + 5 = 12 + 3

Addizione dissociativa
In una **addizione** sostituendo a un **addendo** due o più **addendi** la cui **somma** sia l'**addendo** sostituito il risultato (la **somma**) non cambia

$$a + b = a + c + d \qquad \text{dove } b = c + d$$

23 + 2 = 20 + 3 + 2

Moltiplicazione commutativa
In una **moltiplicazione** cambiando l'ordine dei **fattori** il **prodotto** non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall(a,b) \in N$$

2 x 3 = 3 x 2

Moltiplicazione associativa
Sostituendo a due o più **fattori** il loro **prodotto** il risultato della **moltiplicazione** non cambia.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2 x 5 x 7 = 10 x 7 = 2 x 35 = 14 x 5

Moltiplicazione dissociativa
In una **moltiplicazione** sostituendo a un **fattore** due o più **fattori** il cui **prodotto** sia il **fattore** sostituito il risultato (il **prodotto**) non cambia.

$$a \cdot b = a \cdot c \cdot d \qquad \text{dove } b = c \cdot d$$

24 x 8 = 6 x 4 x 8

Moltiplicazione distributiva
Per moltiplicare un numero per i termini di una addizione (o di una sottrazione) è possibile calcolare il prodotto del fattore dato per ogni singolo termine dell'addizione (o sottrazione) e poi sommarli (o sottrarli).

$$a \cdot (b \pm c) = (b \pm c) \cdot a = (a \cdot b) \pm (a \cdot c)$$

$$5 \cdot (3 + 2) = (3 + 2) \cdot 5 = (5 \cdot 3) + (5 \cdot 2) = 15 + 10 = 25$$

$$7 \cdot (4 - 2) = (4 - 2) \cdot 7 = (7 \cdot 4) - (7 \cdot 2) = 28 - 14 = 14$$

Sottrazione invariantiva
Sommando o sottraendo uno stesso numero ai due termini di una sottrazione il risultato non cambia.

$$a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$$

$$(8 - 5) = (8 + 5) - (5 + 5) = 13 - 10 = 3$$

$$(8 - 5) = (8 - 5) - (5 - 5) = 3 - 0 = 3$$

Divisione invariantiva
Dividendo o moltiplicando per uno stesso numero i due termini di una divisione il risultato non cambia

$$a \div b = (a \div c) \div (b \div c) = (a \cdot c) \div (b \cdot c)$$

Divisione distributiva
Per dividere i termini di una addizione (o sottrazione) per un numero è possibile eseguire la divisione di ogni singolo termine dell'addizione (o sottrazione) per il divisore dato e poi sommarli (o sottrarli)

$$(a \pm b) \div c = (a \div c) \pm (b \div c)$$

Operazione di elevamento a potenza

L'elevamento a potenza è l'operazione che dati due numeri qualsiasi, in un dato ordine e detti **base** ed **esponente**, ne associa un terzo detto **potenza**, che si ottiene moltiplicando la base per sé stessa tante volte quando indica l'esponente.

Il calcolo della potenza di un numero (base) si esegue come prodotto di tanti fattori uguali alla base quanti ne indica l'esponente. In generale:

$$a^n = b = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a)}_{n\text{-volte}} \qquad \text{con } (a;n) \in N$$

L'elevamento a potenza **è interna a N**!
L'insieme N è chiuso rispetto all'elevamento a potenza.

Proprietà delle potenze

Il **prodotto di potenze** aventi la **stessa base** é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti:
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ *Esempio:* $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$ *perché* $3^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$

Il **quoziente di potenze** aventi la **stessa base** é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti:
$a^x \div a^y = a^{x-y}$ *Esempio:* $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$ *perché* $3^4 : 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}) : (\cancel{3} \cdot \cancel{3}) = 3^2$

La **potenza di una potenza** é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti:
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ *Esempio:* $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$ *perché* $(5 \cdot 5)^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5^6$

Il **prodotto di potenze** con lo **stesso esponente** é una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi:
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Il **quoziente di potenze** con lo **stesso esponente** é una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi:
$a^x \div b^x = (a \div b)^x$

Qualsiasi potenza con **esponente 1** è la base.
$b^1 = b$ *e quindi* $b = b^1$

Qualsiasi potenza con **esponente 0** è pari a 1.
$a^0 = 1$

La $\boldsymbol{0^0}$ potenza è priva di significato!
0^0 => *priva di significato*

Qualsiasi potenza con **base 1** è 1.
$1^n = 1$

Qualsiasi potenza con **base 0** ed esponente diverso da zero è 0.
$0^n = 0 \ (\forall n \neq 0)$

Estrazione di radice

E' detta radice aritmetica ennesima (a, anche, di indice *n*) di un numero reale *a*, un secondo numero reale (se esiste), *b*, tale che la potenza ennesima di questo sia uguale ad *a*.
Si scrive $\sqrt[n]{a} = b$ *che equivale a* $b^n = a$
e che può essere posto sotto la forma $b = a^{1/n} = \sqrt[n]{a} = b$
Il numero *a* che compare sotto il segno di radice è detto **radicando**
Esempio: $2^3 = 8$

$$x^3 = 8 \quad \textit{da dove} \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

La radice **non è interna a N**!
L'insieme N non è chiuso rispetto alla radice (I).

Proprietà

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$$

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a \div b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$$

Logaritmo

Dicesi logaritmo di un numero, in una data base, l'esponente a cui si deve elevare la base per ottenere il numero dato.
Se fra tre numeri a>1, b>0 e x intercede una relazione esponenziale del tipo:

$$a^x = b$$

x è detto logaritmo in base a di b, e si scrive: $\log_a b = x$
Esempio: $2^3 = 8$

$$2^x = 8 \quad \textit{da dove} \quad \log_2 8 = 3$$

Il logaritmo **non è interna a N**!
L'insieme N non è chiuso rispetto al logaritmo.

Proprietà

$$\log (a \cdot b \cdot c \cdot \ldots) = \log a + \log b + \log c + \ldots$$

$$\log (a \div b) = \log a - \log b$$

$$\log a^m = m \log a$$

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

Legge di Hankel

Perché a^0 = *1?* Per la legge di Hankel ed un po' di buon senso matematico.
H. Hankel (1839-1873) stabilì il **principio di permanenza delle regole del calcolo**.
Se nella matematica si vuole generalizzare un concetto al di là della sua originaria definizione, bisogna scegliere, tra tutti i modi possibili, quello che permette di conservare immutate le regole del calcolo nel più esteso numero dei casi.

Potenze di 10

Particolare importanza assumono le potenze del numero 10, poiché permettono di semplificare la scrittura di numeri grandissimi e piccolissimi.
Tradurre una potenza di dieci in numero infatti è semplice: escludendo l'esponente zero del primo numero 10^0, si può verificare che il numero delle unità di ogni esponente è uguale al numero di zeri del risultato!

10^6 = 1.000.000

I numeri possono essere scritti quindi in **forma polinomiale** secondo questa regola:

$2.325 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Prefissi internazionali

TERA	**T**	10^{12}	1.000.000.000.000
GIGA	**G**	10^9	1.000.000.000
MEGA	**M**	10^6	1.000.000
(MIRIA	**ma**	10^4	10.000
CHILO	**k**	10^3	1.000
ETTO	**h**	10^2	100
DECA	**da**	10^1	10
unità		10^0	1
DECI	**d**	10^{-1}	0,1
CENTI	**c**	10^{-2}	0,01
MILLI	**m**	10^{-3}	0,001
MICRO	μ	10^{-6}	0,000.001
NANO	**n**	10^{-9}	0,000.000.001
PICO	**p**	10^{-12}	0,000.000.000.001
FEMTO	**f**	10^{-15}	0,000.000.000.000.001
ATTO	**a**	10^{-18}	0,000.000.000.000.000.001

Vedi il documento sulle potenze di 10 disponibile su www.pernigo.com/math.

Frequently Asked Questions in Mathematics

The Sci.Math FAQ Team

```
NAMES OF LARGE NUMBERS
Naming for 10**k:

k     American      European    SI--Prefix

-24                                Yocto
-21                                Zepto
-18   QUINTILLIONTH                Atto
-15   QUADRILLIONTH                Femto
-12   TRILLIONTH                   Pico
-9    BILLIONTH                    Nano
-6    MILLIONTH                    Micro
-3    THOUSANDTH                   Milli
-2    HUNDREDTH                    Centi
-1    TENTH                        Deci
1     TEN                          Deca
2     HUNDRED                      Hecto
3     THOUSAND                     Kilo
4                                  Myria (?)
6     Million       Million        Mega
9     Billion       Milliard       Giga   In italy (Thousand Milliards)
12    Trillion      Billion        Tera
15    Quadrillion   Billiard       Peta
18    Quintillion   Trillion       Exa
21    Sextillion    Trilliard      Zetta
24    Septillion    Quadrillion    Yotta
27    Octillion     Quadrilliard
30    Nonillion     Quintillion
      (Noventillion)
33    Decillion     Quintilliard
36    UNDECILLION                  Sextillion
39    DUODECILLION                 Sextilliard
42    tredecillion                 Septillion
45     quattuordecillion           Septilliard
48   quindecillion                 Octillion
51   sexdecillion                  Octilliard
54   septendecillion               Nonillion
                                   (Noventillion)
57   octodecillion                 Nonilliard
                                   (Noventilliard)
60   novemdecillion                Decillion
63  VIGINTILLION                   Decilliard

6*n   (2n-1)-illion n-illion
6*n+3 (2n)-illion   n-illiard

100   Googol        Googol
303   CENTILLION
600                 CENTILLION

10^100 Googolplex   Googolplex

The American system is used in:
      US,
      ...

The European system is used in:
      Austria,
      Belgium,
      Chile,
      Germany,
      the Netherlands,
      Italy (see exception)
      Scandinavia
```

Lo zero e l'uno

Lo zero e l'uno sono due numeri particolari che assumono comportamenti diversi nelle operazioni e che occorre avere ben chiari.

Lo zero

addizione	elemento neutro	a + 0 = 0 + a = a
sottrazione	elemento neutro a destra	a - 0 = a a - 0 ≠ 0 - a
moltiplicazione	elemento assorbente	a x 0 = 0 x a = a
divisione	se dividendo dà 0	0 ÷ a = 0 perché a x 0 = 0 10 : 2 = 5 significa che 5 *2 = 10 6 : 3 = 2 significa che 2 *3 = 6 … 0 : 9 = x significa x * 9 = 0
divisione	se divisore errore	a ÷ 0 = Impossibile -> ∞ perché non esiste nessun numero che per zero dia un numero 10 : 2 = 5 significa che 5 *2 = 10 6 : 3 = 2 significa che 2 *3 = 6 … 7 : 0 = x significa x * 0 = 5 ????
divisione	se dividendo e divisore	0 ÷ 0 = indeterminata
elev. a potenza	Base	$0^n = 0$ con n ≠ 0
elev. a potenza	Esponente	$a^0 = 1$ con a ≠ 0
elev. a potenza	base e esponente	0^0 non ha senso
radice	Radicando	$\sqrt[n]{0} = 0$

L'uno

addizione	Successivo	a + 1 > a
sottrazione	Precedente	a - 1 < a
moltiplicazione	elemento neutro	a x 1= 1 x a = a
divisione	neutro a destra	a ÷ 1 = a perché a x 1 = a
divisione	inverso a sinistra	1 ÷ a = 1/a
elev. a potenza	Base	$1^n = 1$
elev. a potenza	Esponente	$a^1 = a$ quindi $a = a^1$
radice	Radicando	$\sqrt[n]{1} = 1$ perché $1^n=1$
logaritmo	potenza = 1	$\log_n 1 = 0$
logaritmo	base = potenza	$\log_n n = 1$

Consulta per i casi più… interessanti
mathforum.org/dr.math/faq/faq.divideby0.html (Ask Dr. Math)
www.ripmat.it/mate/divisozero.html (Ripasso matematica)
www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Feb_03/APPUNTI.HTM (PolyMath)

Ricerca termini incogniti

Eseguire una operazione significa cercarne il risultato. E' comunque possibile risalire al valore "incognito" di uno dei termini dell'operazione quando si conosce il risultato e gli altri termini. Questa determinazione si fa utilizzando un procedimento "inverso" rispetto a quello usuale.

Usualmente si indica il **termine incognito** (incognita) con una delle seguenti lettere minuscole: *x*, *y* o *z*.
per attuare questo si scrive l'eguaglianza relativa all'operazione indicando il termine incognito con la x.
Esempio: $x + 3 = 5$

Quindi usando le operazioni inverse o riconducendole a casi simili si risolve.