

La divisibilità - *Divisibility*

Dalla divisione di due numeri a e a' per uno stesso numero b si ottengono resti uguali se, e soltanto se, la differenza $(a - a')$ è divisibile per b .

Multipli e Divisori – *Multiples and Factors*

Dato un numero a , ogni numero divisibile per a è detto suo **multiplo**; ogni numero per il quale a è divisibile è detto suo **divisore**.

I multipli di un numero si determinano moltiplicando il numero stesso per ogni termine della successione dei numeri naturali, escluso lo zero, od anche sommando se stesso alla somma precedente a formare una serie.

$$M(4) = \{4 \times 1; 4 \times 2; 4 \times 3; 4 \times 4; \dots; 4 \times n\}$$

$$M(4) = \{4; 8; 12; 16; \dots\}$$

I multipli di un numero sono infiniti.

$$M(n) \geq n \quad \text{cardinalità } M(n) = \infty$$

Quando la divisione fra un numero a e un numero b dà resto zero si dice che b è divisore di a . I divisori di un numero coincidono con i suoi sottomultipli.

$$D(24) = \{1; 2; 3; 4; 5; 8; 12; 24\}$$

E' evidente che i divisori di un numero sono finiti e compresi tra 1 e il numero stesso.

$$1 \leq D(n) \leq n$$

Un qualsiasi numero ammette come **divisori banali** l'unità e il numero stesso.

Sitografia

<http://it.wikipedia.org/wiki/Divisibilit%C3%A0>

Numeri primi e numeri composti – *Prime and Composite numbers*

I numeri che ammettono come divisori solo l'unità e il numero stesso sono detti **numeri primi** (o anche *semplice*).

A prime number has only 2 factors, the number itself and 1.

Quando un numero non è primo ammette altri divisori oltre a quelli banali; un tale numero viene detto **numero composto**.

A composite number has at least one more factor than the number itself or 1.

Il numero 1 non è considerato un numero primo!

Esistono, inoltre, infiniti numeri primi (dobbiamo a Euclide la prima dimostrazione “per assurdo” di questo asserto). Il **teorema dell'infinità numeri primi** esprime il fatto che, per quanto grande si scelga un numero naturale n , esiste sempre un numero primo maggiore di n .

La loro importanza in matematica è enorme e deriva dal **teorema fondamentale dell'aritmetica**, che afferma che *qualsiasi numero può essere scomposto in fattori primi, e tale scomposizione è unica*.

Crivello di Eratostene. *Porta questo nome un metodo per la ricerca dei numeri primi noto fin dall'antichità. Eratostene (275-195 a.C.), grande matematico e geografo (direttore della biblioteca di Alessandria) Elaborò un procedimento per la ricerca dei numeri primi. Il metodo consiste nell'eliminare da una opportuna griglia contenete un intervallo di numeri naturali i multipli dei numeri primi (prima quelli di 2, poi quelli di 3, ...) in modo che alla fine quelli che restano sono appunto solo numeri primi.*

Si può provare che il procedimento di setacciatura per ricercare i primi fino ad un certo numero n può essere interrotto quando si supera la radice quadrata di n .

Notevoli sforzi sono stati fatti per cercare delle formule generatrici di numeri primi. Fermat (1601-1665) formulò, nel 1640, l'ipotesi che i numeri nella forma

$$F(n) = ((2)^2)^n + 1$$

detti numeri di Fermat, siano primi.

Nel 1732 Eulero scoprì che $((2)^2)^5 + 1 = 641 \times 6700417$, quindi $F(5)$ non è primo.

Un'altra notevole espressione che dà origine a numeri primi è

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

ma per $n = 41$ si ottiene un numero non primo.

Lo steso vale per l'espressione

$$f(n) = n^2 - 79n + 1601$$

che cade per $n=80$.

Una formula insomma non è stata ancora trovata. Datevi da fare.

Sitografia

http://it.wikipedia.org/wiki/Numero_primo

http://it.wikipedia.org/wiki/Crivello_di_Eratostene

<http://primes.utm.edu/>

Alcuni criteri di divisibilità – *Rules for Divisibility or Divisibility Criteria*

Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia divisibile per

- 2 è che sia divisibile per 2 la cifra delle sue unità
if the last digit is 0, 2, 4, 6, or 8
- 3 è che sia divisibile per 3 la somma delle sue cifre
if the sum of digits in the number are divisible by 3
Esempio
132 è divisibile per 3 se lo è $1+2+3=6$ che è divisibile per 3 dunque lo è anche il numero 132.
- 5 è che sia divisibile per 5 la cifra delle sue unità
if the last digit is 0 or 5
- 7 è che sia divisibile per 7 - la differenza fra la somma dei numeri che, scomposto quello dato in gruppi di 3 cifre ognuno (a partire da destra), occupano posto pari, e la somma dei numeri analoghi, che occupano posto dispari
- la differenza che si ottiene, per numeri di almeno tre cifre, tra il resto delle cifre e il doppio delle unità (numeri con più di due cifre)
Esempio
10626 è divisibile per 7 se lo è il numero $1062-2*6=1050$; questo è divisibile per 7 se lo è il numero $105-2*0=105$; questo è divisibile per 7 se lo è $10-10=0$ che è divisibile per 7 dunque lo è anche il numero 10626.
- 11 è che sia divisibile per 11 la differenza fra la somma delle cifre di posto pari (a partire da destra), e quelle di posto dispari
Esempio
 121 è divisibile per 11 se lo è $(1+1)-2=0$ che è divisibile per 11 dunque lo è anche il numero 121.
- 13 è che sia divisibile per 13 la differenza fra la somma dei numeri che, scomposto quello dato in gruppi di 3 cifre ognuno (a partire da destra), occupano posto pari, e la somma dei numeri analoghi, che occupano posto dispari
- 17 è che sia divisibile per 17 un numero con più di due cifre è divisibile per 17 se la differenza (presa in valore assoluto), fra il numero ottenuto eliminando la cifra delle unità e il quintuplo della cifra delle unità è 0, 17 o un multiplo di 17
(numeri con più di due cifre)
Esempio
2584 è divisibile per 17 se lo è il numero $258-5*4=238$; questo è divisibile per 17 se lo è il numero $23-5*8=17$
- 23 è che sia divisibile per 23 la somma del numero delle decine e del settuplo del numero delle sue unità
- 37 è che sia divisibile per 37 il numero somma dei numeri ottenuti scomponendo quello dato in gruppi di tre cifre (a partire da destra)
Esempio
3737 è divisibile per 37 se lo è il numero $737+3=740$...

Sitografia

http://it.wikipedia.org/wiki/Divisore#Regole_per_piccoli_divisori (in italiano)

<http://www.cut-the-knot.org/blue/divisibility.shtml> (in inglese)

La scomposizione in fattori primi o fattorizzazione (*Factorising*)

Il procedimento tramite il quale si ricercano i numeri primi divisori di un numero dato viene chiamato **scomposizione in fattori primi** o **fattorizzazione**. Questo procedimento ha senso per i numeri composti e non per quelli primi.

Per il teorema fondamentale dell'aritmetica, ogni numero intero n maggiore di 1 può essere scomposto in un prodotto di primi in una sola maniera.

Per il teorema della scomposizione in fattori primi, infatti, ogni numero intero positivo diverso da 1 può essere espresso come prodotto di numeri primi in modo tale che $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$ dove p_1, p_2, \dots, p_m sono i numeri primi ordinati in modo che $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_m$ e dove $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ sono gli esponenti interi positivi.

Regola pratica

Si utilizzano i criteri di divisibilità e per divisioni successive, a partire dai numeri primi più piccoli (2;3;5; ..), si stabiliscono quei fattori primi che moltiplicati tra di loro danno il numero dato.

$$\begin{array}{r|l} 2250 & 2 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \times 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$$

Per scomporre in fattori primi un numero dato, lo si divide per il più piccolo numero primo che sia suo divisore, si divide quindi il quoziente ottenuto per il più piccolo numero primo che sia suo divisore e così via fino ad avere come quoziente il numero 1. Il numero dato sarà uguale al prodotto di tutti i numeri primi scritti a destra come divisori.

Ricerca dei divisori

1. Si scompone il numero dato in fattori primi con il metodo della fattorizzazione.
2. Si costruisce una tabella scrivendo nella prima riga tutte le potenze del primo fattore (a partire da quella con esponente 0 fino a raggiungere la potenza in cui esso compare nella scomposizione), nella seconda riga tutte le potenze del secondo fattore (a partire da quella con esponente 0 fino a raggiungere la potenza in cui esso compare nella scomposizione) e così via fino ad esaurire i fattori.
3. Si moltiplicano i numeri della prima riga, in successione, per tutti i numeri della seconda.
4. Si moltiplicano i numeri ottenuti per ciascun numero della terza riga. Si prosegue in questo modo moltiplicando i numeri ottenuti per la quarta riga e così di seguito fino ad esaurire le righe.

$$\begin{array}{l}
 1. \quad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \\
 \\
 2. \quad \begin{array}{ll}
 2^0; 2^1; 2^2; 2^3 & 1; 2; 4; 8 \\
 3^0; 3^1; 3^2 & 1; 3; 9 \\
 5^0; 5^1 & 1; 5
 \end{array} \\
 \\
 3. \quad \begin{array}{r}
 (1; 2; 4; 8) \quad \times \\
 (1; 3; 9) \quad \quad = \\
 \hline
 (1; 2; 4; 8; 3; 6; 12; 24; 9; 18; 36; 72) \times \\
 (1; 5) \quad \quad \quad \quad = \\
 \hline
 1; 2; 4; 8; 3; 6; 12; 24; 9; 18; 36; 72; \rightarrow \\
 5; 10; 20; 40; 15; 30; 60; 120; 45; 90; 180; 360
 \end{array}
 \end{array}$$

Criterio generale di divisibilità

Per stabilire se due numeri sono tra loro divisibili se ne può ricercare il quoziente tramite una semplice divisione. Alla stessa conclusione si poteva pervenire utilizzando i fattori primi e facendo riferimento alla regola generale che prende il nome di **criterio generale di divisibilità**.

Due numeri sono divisibili se, scomposti in fattori primi, nel primo numero appaiono almeno tutti i fattori del secondo con esponente maggiore o uguale a quello con cui compaiono nel secondo.

Il quoziente di due numeri divisibili, scomposti in fattori primi, è dato dal prodotto di tutti i fattori del dividendo aventi come esponente la differenza degli esponenti con cui i fattori compaiono nel dividendo e nel divisore.

$$\begin{array}{l}
 19404 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11 \\
 294 = 2 \times 3 \times 7^2 \\
 19404 : 294 = 66 \text{ resto } 0 \\
 19404 : 294 = 2^{2-1} \times 3^{2-1} \times 7^{2-2} \times 11 = 2 \times 3 \times 11
 \end{array}$$

Lo stesso risultato si ottiene applicando sulla frazione la proprietà invariantiva.

$$\frac{19404}{294} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11}{2 \times 3 \times 7^2} = 2 \times 3 \times 11 = 66$$

Massimo Comune Divisore (MCD)

Highest Common Factor (HCF) - Greatest Common Factor (GCF)

Dati due o più numeri a, b, \dots è detto *massimo comun divisore* il maggiore fra i divisori comuni di essi.
*The greatest common factor of two or more whole numbers is the **largest whole number** that divides evenly into each of the numbers.*

Se il MCD di due o più numeri è l'unità, questi sono detti *primi fra loro*.

Ricerca del MCD (*Finding HCF*)

Esistono diversi sistemi per la ricerca del MCD tra due o più numeri.

Metodo grafico insiemistico

Trovati gli insiemi dei divisori dei numeri dati, il MCD è dato dall'elemento maggiore di quelli risultanti dall'intersezione degli insiemi.

Questo metodo, intuitivo e didattico, risulta però problematico per numeri grandi, essendo richiesti molti calcoli per la ricerca dei divisori quanti i fattori primi sono diversi e con esponenti elevati.

Mediante scomposizione in fattori primi

Il MCD di più numeri dati è il prodotto dei fattori primi ad essi comuni, ognuno preso con il minimo esponente che gli compete.

$$56 = 2^3 \times 7$$

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$\text{MCD}(56;140) = 2^2 \times 7 = 28$$

Se 28 è MCD tra 56 e 140 allora

$$56 / 28 = (2^3 \times 7) : (2^2 \times 7) = 2^{3-2} \times 7^{1-1} = 2$$

$$140 / 28 = (2^2 \times 5 \times 7) : (2^2 \times 7) = 2^{2-2} \times 5 \times 7^{1-1} = 5$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$16 = 2^4$$

$$\text{MCD}(15;16) = 1 \quad \text{numeri primi fra loro!}$$

Metodo di Euclide o delle divisioni successive (*è disponibile un apposito documento su questo metodo)

1. Si divide il maggiore per il minore, arrestando al divisione al quoziente intero.
2. Si divide poi nello stesso modo il minore dei due numeri per il resto trovato.
3. Si divide questo primo resto per il successivo, e così via.

L'ultimo resto trovato (diverso da 0) è il MCD cercato.

Se i numeri sono più di due, si cerca prima il MCD fra due di essi; si cerca poi il MDC tra il MCD trovato e il terzo numero; e così via. L'ultimo MCD trovato è quello di tutti i numeri dati.

MCD(350; 225) = 4 perchè 350 : 225 = 1 resto 125 225 : 125 = 1 resto 100 125 : 100 = 1 resto 25 100 : 25 = 4 resto 0	$a = b \cdot q + r$	Se 25 è MCD tra 350 e 225 allora: 350 / 25 = 14 resto 0! 225 / 25 = 9 resto 0!
--	---------------------	--

Minimo Comune Multiplo (mcm)

Lowest Common Multiple (LCM) - Least Common Multiple (LCM)

Dati due o più numeri a, b, \dots è detto *minimo comune multiplo* il minore dei multipli comuni di essi.
The least common multiple of two or more non-zero whole numbers is the smallest whole number that is divisible by each of the numbers.

Ricerca del mcm (*Finding LCM*)

Esistono diversi sistemi per la ricerca del mcm tra due o più numeri.

Metodo grafico insiemistico

Trovati gli insiemi dei multipli dei numeri dati, il mcm è dato dall'elemento minore di quelli risultanti dall'intersezione degli insiemi.

Questo metodo, intuitivo e didattico, risulta però problematico per numeri grandi, essendo l'insieme dei multipli infinito e lungo da determinare anche parzialmente.

Mediante scomposizione in fattori primi

Il mcm di più numeri dati è il prodotto dei fattori primi ad essi comuni e non comuni, ognuno preso con il massimo esponente che gli compete.

$$40 = 2^3 \times 5$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$\text{mcm}(40;48) = 2^4 \times 3 \times 5 = 240$$

Se 240 è mcm tra 40 e 48 allora

$$240 / 40 = (2^4 \times 3 \times 5) : (2^3 \times 5) = 2^{4-3} \times 3 \times 5^{1-1} = 2 \times 3 = 6$$

$$240 / 48 = (2^4 \times 3 \times 5) : (2^4 \times 3) = 2^{4-4} \times 3^{1-1} \times 5 = 5$$

Sitografia



Ubi Math Point: www.pernigo.com/math/prime/

Number Theory - Math Goodies: www.mathgoodies.com


SPAI Autoformazione in matematica: www.spai2.ti.ch/autoformazione/


Keywords

 *Matematica, Aritmetica, Divisibilità, Fattorizzazione, MCD, mcm, Massimo Comune Divisore, minimo comune multiplo, algoritmo di Euclide, esercizi con soluzioni*

  *Math, Arithmetic, Divisibility, Highest Common Factor, HCF, Greatest Common Factor, GCF, Lowest Common Multiple, LCM, Least Common Multiple, LCM, Greatest common divisor, GDC, Euclidean Algorithm*

 *Matemática, Aritmética, Máximo común divisor, mcd, m.c.d., Mínimo común múltiplo, mcm, m.c.m., algoritmo de Euclides.*

 *Mathématique, Arithmétique, Divisibilité, factorisation, Plus grand commun diviseur, PGDC, Plus petit commun multiple, PPCM, Algorithme d'Euclide*

 *Mathematik, Arithmetik, Größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches, Euklidischer Algorithmus*